



Biblioteca XVIII-99

CORSO
DI
MATEMATICHE.

PARTE TERZA.

SEZIONE PRIMA.

6th
6268

585 978
500

CORSO DI MATEMATICHE,

PER USO

DELLE GUARDIE-MARINA;

DEL SIG.^r BEZOUT, DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE,
ESAMINATORE DELLE GUARDIE-MARINA, DEGLI ALLIEVI
E DEGLI ASPIRANTI DEL CORPO DI ARTIGLIERIA, E
CENSORE DEI LIBRI.

P A R T E T E R Z A ,

*Che contiene l'Algebra, e la sua applicazione
all'Aritmetica, ed alla Geometria.*

Tradotta dal Francese (sull'ediz. di Parigi del 1798),
per ordine di S. M. (D. G.); da GAETANO FRANCHINI
Professore di Geometria Sublime nel 1.^o Collegio della
Reale Accademia di Marina, per uso di questa.

SEZIONE PRIMA.

NAPOLI,
DALLA STAMPERIA REALE.

1823.



216 1880



IL TRADUTTORE

A CHI LEGGE.

NEL pervenirmi il REAL COMANDO di tradurre la Terza Parte del Corso di Matematiche del Signor Bezout, la qual contiene l'Algebra, non che la sua applicazione all'Aritmetica, ed alla Geometria; mi accinsi all'opra animato interamente dal ricevuto Alto Comando, il qual rinvigorì mie forze che sicuramente deboli sono in paragone di sì degno Autore, il cui merito è ben noto. Ed in fatti, oltre le molte edizioni delle sue Opere eseguite in Parigi tra pochi anni, la Prima e Seconda Parte dell'anzidetto Corso vedesi tradotta dal Signor D. Giuseppe de Sangro degno Professore della Reale Accademia Militare; e dalla sagace penna del chiarissimo Signor D. Vincenzo Flauti primario Professore di Analisi nell'Università dei Regj Studj, trovasene con somma penetrazione tradotto anche il Calcolo Differenziale, in cui nell'indirizzo a chi legge, egli dice, che le Opere di questo Autore *mostrano quanto Bezout sia grande tra Matematici*. Il loro esem-

pio mi ha certamente con piacere fatto intraprendere la divisata Traduzione , nella quale per quanto han permesso le mie scarse conoscenze , ho cercato di fedelmente e chiaramente esporre l' idea dell' Autore , senza però trascurare i riguardi dovuti al nostro Italico Linguaggio. Accogli , o amico Lettore , cortesemente quest' Opera in cui troverai quanto interamente ad essa spetta , senza aver bisogno di supplirvi cosa da altrove ; mentre la diversità dei caratteri coi quali è impressa , te ne renderà più gradita l' edizione , perchè potrai da ciò calcolare la difficoltà di eseguirla.

Vivi felice.

P R E F A Z I O N E

DELL' AUTORE.

Le verità esposte nei due precedenti volumi, sono la base di tutte le parti delle Matematiche; e'l metodo con cui si son presentate, può servire all'intelligenza di altre più elevate. Ma riflettendo su di tal metodo, si è potuto osservare, che il numero delle proposizioni che debbon richiamarsi per capirne una nuova, si accresce secondo che questa si allontana dal principio della catena che tra lor le avvince.

Questo modo di dimostrare o rintracciare le verità matematiche, fuor di dubbio è cospicuo; ma ne divien sempre più penoso, secondo che le medesime più allontanansi dai principj: esso di più ha l'inconveniente di esigere dalla ragion dell'uomo, nuovi ri-

sarebbe stato difficilissimo di pervenirvi, o totalmente impossibile.

Dunque i principali vantaggi che posson ritrarsi da questa scienza, consistono in facilitar l'intelligenza e la scoperta delle verità matematiche; ed in porgere dei mezzi facili, e delle regole generali per risolvere tutti li problemi che posson sulle grandezze proporsi.

I Metodi algebrici non eran necessari nei precedenti volumi, in cui gli oggetti eran semplici; ma la sintesi ivi impiegata, non può esibire le stesse facilità per trattare ciò che resta ad esporre. D'altra parte, una delle cose che debbono aversi in mira, nello studio delle Matematiche, si è più di acquistar lo spirito di ricerca e d'invenzione, che solamente può far mettere a profitto le conoscenze di già acquistate, ed al quale scopo tende direttamente l'Algebra: che di accumulare un gran numero di proposizioni.

Il principale oggetto, cui si tende,

in esporre l'algebra in questo volume, è di porsi in istato di trattare, in appresso, la Meccanica in un modo facile ed utile. Ma per ritrarre dall' Algebra i vantaggi che essa può esibire, bisogna, rendersi familiari le differenti operazioni che insegna, ed accostumarsi ad interpretar le frasi del suo linguaggio; per tal motivo sonosi inchiusse in questo volume medesimo, varie applicazioni dell' Algebra all' Aritmetica ed alla Geometria. Erasi anche stabilito di riunirvi un altro ramo di Analisi, cioè la Teoria delle Grandezze Variabili, o almeno di esporne quello che sarebbe necessario per alcune utili applicazioni alla Meccanica; ma una specie di necessità di serbare a questa terza parte lo stesso carattere d'impressione usato nelle due precedenti, non ha permesso di eseguire al momento questo progetto, senza eccedere i giusti limiti.

I differenti metodi seguiti finora, in esporre i principj dell' Algebra, riduconsi a due principali. Il primo consi-

ste in esibir le regole delle quattro operazioni fondamentali, e le altre che guidano al risolvimento delle equazioni del primo grado, per una strada che può riguardarsi come sintetica. Il secondo, che è puramente analitico, conduce a trovar queste regole, proponendo dei problemi, la cui soluzione esige certe operazioni, e certi ragionamenti, che in seguito di posteriore esame, trovansi essere gli stessi in tutti i problemi, e per questa ragione vengono eretti in regole generali. Quest' ultimo metodo sulle prime parrebbe preferibile all' anteriore, perchè sembra dover selleticare l' amor proprio dei Principianti, e stimolare la lor curiosità. Ma se riflettesi, che allor l' attenzione è necessariamente divisa fra tre oggetti, cioè lo stato del problema, i ragionamenti per esprimerlo algebricamente, e le operazioni che bisogna fare per mezzo dei segni, il cui significato le sfugge tanto più facilmente, quanto meno essa è esercitata a rappresentar le sue idee in un modo astrat-

to ; sembra che si dubiterà esser , nei principj , questo metodo il migliore , per la maggior parte dei lettori. Al contrario , il medesimo forse non produrrebbe un effetto tutto opposto a quello che alcuni gli attribuiscono ? I ragionamenti che esige , benchè semplici nei principj , ove sicuramente trattasi di problemi facili , debbon però formarsi dallo spirito di quello stesso che opera ; e non l'avviliranno sicuramente , quando non gli si presenteranno alla fantasia ? Il metodo d' invenzione suppone sempre una certa sagacità , ch'è quella appunto che han dovuto seguire gli inventori , e quindi quella degli uomini di genio ; or questi non forman certamente il maggior numero.

Tali sono le considerazioni che ne han determinato di seguire il primo metodo nell' esporre le regole fondamentali ; ma come un degli oggetti che si è proposto , è di far acquistare al lettore questo metodo d' invenzione , così si è seguito il primo , fino a tanto si è creduto ne-

cessario, che la mancanza di esercizio dei segni algebrici, non più fosse un ostacolo all'intelligenza di quel che si sarebbe per esporre.

Nulla si dirà del metodo con cui si son trattate le cose; ciò non è più da giudicarsi. Ma si crede potersi un pò trattenere su di alcune delle materie che si son considerate; esse son di due specie: elementari le une; le altre, almeno per la maggior parte, suppongono che siensi rese molto familiari le prime. Per le une, e per le altre, si è fatto in modo che nulla si è tralasciato di ciò che può esser utile. Quelle della seconda specie si son distinte con caratteri più piccioli: alcune note sparse nell'opera, e che spettano alla parte elementare, son situate al piede delle pagine, e richiamate con un asterisco. Fra gli oggetti impressi col carattere più piccolo, tra le altre cose, si è esposto 1.º Il Ristretto di un metodo, che si troverà più estesamente nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze, per

l'anno 1764, e che ha per oggetto, l'eliminazione delle incognite nelle equazioni. Questa è una parte di Algebra, su cui resta molto anche da fare, e che tanto più importa alla perfezione di questa scienza, quanto più ne dipende assolutamente la risoluzion generale delle equazioni. 2.º Un metodo per la risoluzione delle equazioni. Nulla si dirà dei tentativi che su di tal punto sonosi fatti dopo l'invenzione dell'Analisi. Si osserverà solamente che fino ai tempi presenti, non si è oltrepassato il quarto grado; e che non mai si è avuto un metodo uniforme per i gradi che si sanno risolvere. Per verità, nell'Analisi dimostrata del P. Reyneau, si trova un metodo che egli espone come generale, e che è dovuto al Sig.^r Tschirnaiis, il quale lo pubblicò negli Atti di Lipsia; ma indipendentemente dai calcoli penosi e superflui nei quali tal metodo fa piombare, il medesimo, pel quarto grado, non compie che con una modificazione della regola; ed alcune riflessioni sulla

forma che debbon necessariamente avere le radici delle equazioni dei gradi superiori, dimostran subito che esso non è valevole a passare il quarto grado. I limiti che, le materie più necessarie al prefisso oggetto, ne han costretto di dare all'esposizione del metodo che si propone, ne hanno impedito di entrare in alcune particolarità sulla sua applicazione al quinto grado, ed ai gradi superiori. Si era anche deciso di non publicar niente su di questo soggetto, che quando scevro da altre occupazioni, gli si sarebbe potuta dare la perfezione di cui credesi capace; ma il Signor Eulero avendo pubblicato nel tomo 1x dei *nuov. Comment. di Pietroburgo*, ora uscito alla luce, un metodo sulla stessa materia; qui si esibiscon le cose, come da principio si son trovate, cioè quali erano verso la fine del 1761. Del resto, si troverà maggior precisione nelle Memorie dell'Accademia; tra le altre cose, ivi si osserverà un metodo per le equazioni, il cui grado sia dinotato da un numero

curve nell' Architettura Navale. Ed anche ciò si è deciso , pel di loro uso nel costruire le equazioni. Nel presentar questi oggetti , e varj altri che troveransi sparsi nel corso dell' Opera , si è fatto in modo , che essi divenissero il germe di più estese conoscenze , per quelli che brameranno acquistarle.

TAVOLA

DELLE MATERIE.

DELL' ALGEBRA.

SEZIONE PRIMA

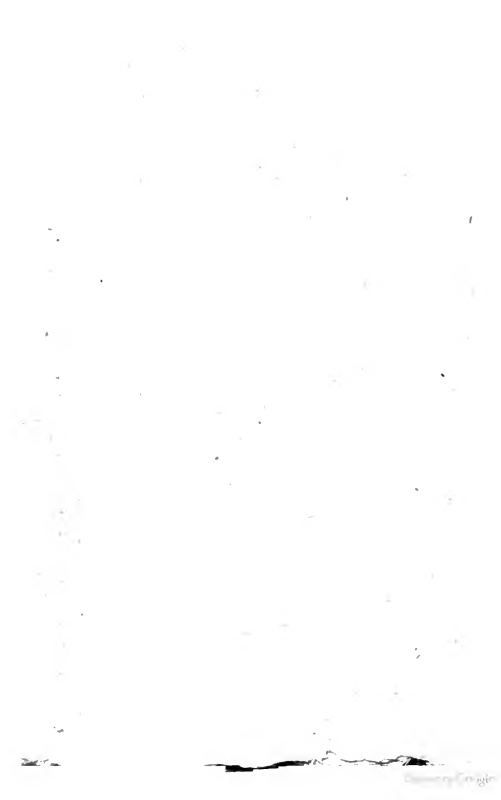
<i>NELLA quale si espongono i principj del calcolo delle algebriche grandezze.</i>	pag. 1
<i>Delle fondamentali operazioni che si eseguono sulle grandezze generalmente considerate</i>	3
<i>Dell' adizione , e della sottrazione</i>	4
<i>Della moltiplicazione</i>	10
<i>Della divisione</i>	23
<i>Del modo di ritrovare il massimo comun divisore di due grandezze letterali</i>	34
<i>Delle frazioni letterali</i>	37
<i>Delle equazioni</i>	45
<i>Dell' equazioni del primo grado ad una sola incognita</i>	47
<i>Applicazione de' principj precedenti , al risolvimento di qualche facile problema</i>	59

<i>Della formazione delle potenze delle grandezze composte, e dell'estrazione delle di loro radici.....</i>	166
<i>Dell'estrazione delle radici delle gran- dezze composte.....</i>	184
<i>Del modo di approssimar le radici delle potenze imperfette delle grandezze lit- terali.....</i>	189
<i>Delle equazioni a due incognite, quan- do esse sorpassano il primo grado ..</i>	202
<i>Delle equazioni a più di due inco- gnite, quando esse sorpassano il primo grado.....</i>	211
<i>Delle equazioni a due termini.....</i>	212
<i>Delle equazioni che possonsi risolvere come quelle del secondo grado.....</i>	215
<i>Della composizione delle equazioni....</i>	217
<i>Delle principali trasformazioni, cui pos- son soggettersi le equazioni.....</i>	227
<i>Della risoluzione delle equazioni composte.</i>	230
<i>Applicazione al terzo grado.....</i>	235
<i>Applicazione al quarto grado.....</i>	245
<i>Riflessioni sul metodo precedente, e sulla sua applicazione alle equazioni di gradi superiori al quarto.....</i>	257
<i>Dei divisori commensurabili delle equa- zioni.....</i>	262
<i>Dell'estrazione delle radici delle gran-</i>	

XXII

<i>dezze in parte commensurabili, ed in parte incommensurabili</i>	<i>269</i>
<i>Del modo di approssimar le radici delle equazioni composte</i>	<i>274</i>
<i>Riflessioni sul metodo precedente</i>	<i>278</i>
<i>Del modo di aver le radici uguali delle equazioni</i>	<i>280</i>
<i>Del modo di aver le radici immaginarie delle equazioni</i>	<i>282</i>





DELL' ALGEBRA.

SEZIONE PRIMA,

*Nella quale si espongono i principj del
calcolo delle algebriche grandezze.*

1. L' OGGETTO della scienza , che *Algebra* vien detta , si è di ridurre a regole generali il risolvimento di tutt' i problemi , che posson proporsi sulle grandezze.

Queste regole per esser generali , non debbon certamente dipendere dai particolari valori delle grandezze , che si stan considerando nel problema , che si propone a risolvere ; ma bensì dalla di lui medesima natura , e debbon costantemente esser sempre le stesse in tutt' i problemi della medesima specie.

Dal che risulta manifestamente, che l'Algebra per rappresentar le grandezze, non deve impiegar le stesse cifre, o segni dell'aritmetica, ma però dei diversi. In fatti, allor che per le di costei regole, siasi ottenuto un qualche risultato, da questo la nostra mente non ritrarrà per certo indizio alcuno, che le dinoti la strada per la quale vi si è pervenuto. Così se ottengasi 12 per risultato di una o più operazioni aritmetiche, in tal numero più non si ravvisa che esso siasi ottenuto piuttosto dalla moltiplicazione di 3 per 4, che dall'altra di 2 per 6, o pur dal sommare il 5 col 7, o il 2 col 10, o da qualunque altra combinazione di operazioni. L'Aritmetica dà delle regole per pervenire a certi risultati, ma questi non mai stabiliscono de' principj generali: l'Algebra soddisfar deve a questi due oggetti, e per riuscirvi adopra delle cifre universali per dinotar le grandezze, esse son le alfabetiche lettere, le quali non dinotano piuttosto un numero, che qualche altra grandezza, ma posson rappresentare tutto ciò che si vuole, o tutto ciò che meglio conviene. Queste cifre stan sempre sotto degli occhi in tutto il decorso di un calcolo, conservano, per così dire, l'impronta delle operazioni per le quali procedono, o almeno ne' risultati di queste offrono la strada

da seguirsi per ottenere lo stesso intento col più semplice mezzo. Qui non si sviluppa maggiormente questa leggiera idea che si è data dell'Algebra, mentre che tutto il restante di quest'opera a ciò è destinato.

In Algebra non solamente si rappresentano le grandezze con cifre universali; ma così rappresentansi ancora i modi, con cui esse si riguardano tra loro scambievolmente, e le differenti operazioni che voglionsi su di loro eseguire: in una parola tutto è simbolo, o rappresentazione, ed allor che dicesi di essersi eseguita un'operazione su di una data grandezza, ciò dinota d'essersi assegnata a questa una nuova forma. Secondo che più innoltrerassi, si farà conoscere i diversi modi di rappresentar le grandezze.

Delle fondamentali operazioni che si eseguono sulle grandezze generalmente considerate.

2. In Algebra colle grandezze espresse con lettere, fansi operazioni del tutto analoghe a quelle, che in Aritmetica su de' numeri si adoprano; cioè che tali grandezze, o vengon tra lor sommate, o sottratte, o moltiplicate, o divise, ec.; ma però sì fatte operazioni differiscono

da quelle dell' Aritmetica , perchè i loro risultati spesso indicano operazioni aritmetiche da eseguirsi.

Dell' addizione , e della sottrazione.

5. L'addizion delle grandezze simili non ha bisogno di alcuna regola ; per sommar la quantità espressa da a , colla stessa quantità a , è evidente che bisogna scrivere $2a$. Per sommare $2a$ con $3a$, bisogna scrivere $5a$, e così in seguito.

In quanto poi alle grandezze dissimili , le quali esprimonsi sempre con lettere diverse ; allor quest' addizione viene indicata , ed il segno a ciò destinato è il seguente $+$, che chiamasi *più*.

Così se vogliasi sommare la quantità a coll'altra b , non si può far altro che scrivere $a+b$; di maniera che non si conosce effettivamente un tal risultato , che allor quando si conoscono i particolari valori delle suddette grandezze a , e b ; se a equivale a 5 , e b a 12 , $a+b$ equivalerà a 17.

Parimente per sommare.....	$5a+3b$
con	$9a+2c$
e con	$9b+3d$
si scriverà.....	$5a+3b+9a+2c+9b+3d$
che ridurrassi a	$14a+12b+2c+3d$

riunendo insieme le grandezze simili.

4. Riguardo alla sottrazione direm lo stesso che per l'addizione. Se le grandezze son simili, non vi è bisogno di regola alcuna; poichè, se da $5a$ vuol sottrarsene $2a$, è evidente che il residuo è $3a$.

Ma se le grandezze son dissimili, allor questa sottrazione s'indica col segno $-$, che dicesi *meno*.

Così se da a debbasi sottrarre b , si noterà $a-b$.

Così ancora se $3b$ debba sottrarsi da $5a$, si scriverà $5a-3b$.

Se poi da $9a+6b$
vuol toliersi $5a+4b$
si scriverà $9a+6b-5a-4b$
che si ridurrà a $4a+2b$
facendo la deduzione sulle grandezze simili; ciò che dicesi *contrarre*, o *ridurre*. Finalmente per sottrarre $5a+3b+4c$ da $6a+4b+4d$, si scriverà $6a+4b+4d-5a-3b-4c$, che riducendo, offre $a+b+4d-4c$.

5. Il numero che precede una lettera, dicesi di lei *coefficiente*; così in $3b$, il 3 è il coefficiente di b . Il coefficiente 1 non si nota avanti a quella lettera, cui esso spetta: così sottraendosi $2a$ da $3a$, rimane $1a$, e scrivesi soltanto a . Per cui bisogna ben guardarsi di credere che sia zero il coefficiente di quelle

lettere che non lo hanno, giacchè egli in tal caso è l'unità, o sia 1.

6. Le grandezze che sommansì, o sottraggonsì, si possono scrivere con quell'ordine che si vuole; onde se deve sommarsi a con b , si può indifferentemente scrivere $a+b$, o $b+a$; così pure nel sottrarsi b da a , si può scrivere tanto $a-b$, quanto $-b+a$. Ma siccome, per forza dell'uso, è più facile pronunciar le lettere per ordine alfabetico, che in altro diverso; così quello si seguirà quanto più si potrà.

7. Bisogna pur sapere che le grandezze non precedute da alcun segno, si considera come se avessero il $+$; per cui a è lo stesso che $+a$. È uso ancora di scriver senza segno la prima di più quantità, che seguonsi l'una all'altra, se essa però deve avere il $+$; ma se poi deve avere il $-$, bisogna assolutamente notarcelo.

8. Quando dopo di essersi eseguita un'operazione si procede alla riduzione, può accadere che debba una quantità sottrarsi da un'altra più piccola; in tal caso bisogna sottrarre la più piccola dalla più grande, e fissare al residuo il segno della più grande. Per esempio, se dopo aver sommato $2a+3b$ con $5a-7b$, vogliasi ridurre il risultato $2a+3b+5a-7b$, si scriverà $7a-4b$, con togliere $3b$ da $7b$, e dando

al residuo $4b$, il segno che aveva $7b$. In fatti il segno — di $7b$ nella grandezza $5a-7b$, dinota che $7b$ deve sottrarsi; ma se la grandezza $5a-7b$ viene ad aumentarsi dell'altra $2a+3b$, è evidente che le $3b$ che si aggiungono, diminuiscono d'altrettanto la sottrazione da eseguirsi; per cui non deve altro sottrarsi che $4b$; e quindi aversi $-4b$ nel risultato. Dal che viene a stabilirsi la seguente regola generale: *L'addizion delle grandezze algebriche si esegue scrivendo le loro parti una appresso dell'altra coi stessi segni che hanno: indi riducendo le quantità simili ad una sola, col riunire da una parte tutte quelle col segno +, e dall'altra tutte le altre col —; e finalmente togliendo il risultato minore dal maggiore, coll'apportare al residuo lo stesso segno del maggiore.*

E S E M P I O.

Sien da sommarsi le quattro seguenti grandezze:

$$5a+3b-4c$$

$$2a-5b+6c+2d$$

$$a-4b-2c+3e$$

$$7a+4b-3c-6e$$

$$\begin{array}{r} \text{Somma...} \\ 5a+3b-4c+2a-5b+6c+2d+a-4b-2c \\ +3e+7a+4b-3c-6e. \end{array}$$

Facendo la riduzione, si ha $15a$ per le a ; per le

b si ha $7b$ da una parte, e $-9b$ dall'altra, e quindi $-2b$ per residuo; per le c , si ha $-9c$ da una parte, e $+6c$ dall'altra, per cui $-3c$ è il residuo; e riducendo similmente le altre, finalmente risulta $15a-2b-3c+2d-3e$.

9. Se una grandezza algebrica costi di più altre quantità, ciascuna preceduta dal suo segno $+$, o $-$; ognuna di queste dicesi *termine* di quella.

10. La grandezza di un termine, vien detta *Monomio*; e se i termini che costituiscono una quantità son due, tre, ec. essa chiamasi *Bino- mio*, *Trinomio* ec.; ogni grandezza poi che costa di un qualunque numero di termini, dicesi generalmente *Polinomio*.

11. La regola generale per la sottrazione delle grandezze algebriche è la seguente: *Si cambino i segni di tutt' i termini della grandezza che deve sottrarsi*, cioè i $+$ in $-$, ed i $-$ in $+$: indi si sommi questa grandezza così cambiata con quella da cui deve sottrarsi, e si contragga il risultato.

E S E M P I O.

Da.....	$6a-3b+4c$
si vuol sottrarre.....	$5a-5b+6c$
si ha	$6a-3b+4c-5a+5b-6c$
che riducendo, offre per residuo	$a+2b-2c$

Per dimostrar questa regola, prendasi un esempio più semplice. Suppongasi che da a voglia sottrarsi b ; è chiaro che deve potarsi $a-b$; ma se da a voglia sottrarsi $b-c$, converrà scrivere $a-b+c$; in fatti poichè non deve sottrarsi tutta la b , ma soltanto b diminuita di c ; dunque se togliesi subito l'intera b scrivendo $a-b$, si toglie di troppo, e quindi bisogna ricompensare il di più che si è tolto; cioè si deve aggiungere c , scrivendo $a-b+c$, per cui fa d'nopo cambiare i segni di tutt' i termini della quantità da sottrarsi.

Nei numeri tutta quest'attenzione è superflua, dappoichè se debbasi, per esempio, sottrarre $8-3$ da 12 , si diminuirà prima 8 del 5 , lo che dà 5 , e poi questo si sottrarrà dal 12 , e si avrà per residuo 7 ; ma è chiaro ancora che si potrebbe in sulle prime sottrarre 8 da 12 , ed al residuo 4 aggiungervi 5 , ciocchè darà anche 7 ; or quest'ultimo partito è quello che bisogna prendere in Algebra, perchè non si può fare la riduzione preliminare, come si fa sopra de' numeri.

12. Le grandezze precedute dal segno $+$ diconsi grandezze *positive*, e le altre precedute dal $-$ diconsi *negative*. In seguito si entrerà in qualche dettaglio circa la natura, e gli usi delle grandezze considerate separatamente l'una dall'altra.

Della Moltiplicazione.

13. La moltiplicazione Algebrica esige delle considerazioni tutte particolari per se, e che non hanno affatto luogo nella moltiplicazione aritmetica; dappoichè oltre delle grandezze debbonsi considerare anche i segni.

Del resto non considerando altro che i valori numerici delle grandezze espresse dalle lettere, deve della moltiplicazione algebrica formarsi la stessa idea che della moltiplicazione aritmetica (*Arit.* 40.); così, moltiplicare a per b , significa prender la grandezza espressa da a , tante volte, quante son le unità della grandezza dinotata da b .

14. Ma siccome l'oggetto attuale si è di fare o di rappresentar la moltiplicazione, indipendentemente dai valori numerici delle grandezze, così bisogna convenir su dei segni che si destineranno per indicarla.

Oltre del segno $\times$, col quale si disegna la moltiplicazione, come si è detto in Aritmetica, si farà anche uso del punto, che s'interpone tra le due grandezze da moltiplicarsi: di maniera che $a \cdot b$, ed $a \times b$ dinotano la stessa cosa.

S'indica ancora la moltiplicazione (almeno

tra i monomj), non mettendo alcun segno tra il moltiplicando ed il moltiplicatore; così $a \times b$, $a . b$, ab son tre espressioni, di cui ciascuna dinota che debba moltiplicarsi a per b ; quest' ultima è la più usata.

15. Per moltiplicare ab per c , si scriverà dunque abc . Per moltiplicare ab per cd si noterà $abcd$, e così in seguito: l'ordine col quale si scrivon queste lettere è totalmente arbitrario, giacchè si ottien sempre lo stesso prodotto, qualunque sia l'ordine con cui esse si moltiplicano (*Arit.* 44.).

16. Dunque allor che in appresso s' incontrerà una grandezza come ab , abc , o $abcd$ cc. in cui più lettere si troveranno scritte l'una in seguito dell' altra senza segno alcuno, si conchiuderà francamente, che una tal grandezza dinoti il prodotto della moltiplicazion successiva di ciascuna delle lettere che la compongono.

17. Si son chiamati fattori di un prodotto (*Arit.* 42.) tutti quei numeri, dalla di cui moltiplicazione quello si è ottenuto; così in ab ; i fattori sono a , e b ; in abc i fattori sono a , b , c , e così successivamente.

18. È conseguenza della regola che si è stabilita (15), che il prodotto della moltiplicazione di più quantità algebriche monomie,

deve contenere tutte le lettere, che si trovano in ambidue i fattori.

Ciò posto, se le grandezze che debbon moltiplicarsi, fosser composte della stessa lettera, questa dunque si troverà tante volte scritta nel prodotto, quante si trova in tutt' i fattori, qualunque sia il numero delle grandezze da moltiplicarsi.

Così a moltiplicata per a , darà aa : aa moltiplicata per aaa , darà $aaaaa$: aa moltiplicata per aaa , ed indi per a , darà $aaaaaa$.

19. In questo caso, si è convenuto di scrivere una tal lettera una sol volta, ma di dinotare con un numero che dicesi *Esponente*, e che si situa a destra della medesima lettera ed un poco più sopra, quante volte essa è fattore, o pur quante volte dev' essere scritta.

In luogo di aa , si scriverà dunque a^2 ; in luogo di aaa , si scriverà a^3 ; in luogo di $aaaaa$, si scriverà a^5 , e così in seguito.

Da ora in avanti dunque resta stabilito, che *l'esponente di una lettera, dinota quante volte essa è fattore in un prodotto.*

→ In a^2b^3c vi son tre fattori di differente valore,

cioè a, b, c : ma di tali lettere, la prima è fattore tre volte, la seconda due volte, e la terza una volta sola: in fatti $a^3 b^2 c$ equivale ad $aaabbc$.

Bisogna dunque ben guardarsi di non confondere l'esponente col coefficiente; per esempio, di confondere a^2 con $2a$, a^3 con $3a$: in $2a$ il coefficiente 2 dinota che a è sommata con a , cioè che $2a$ equivale ad $a+a$; ma in a^2 l'esponente 2 indica che la lettera a dovrebbe scriversi due volte di seguito senza segno alcuno, che essa è moltiplicata per se stessa, o finalmente che essa è fattore due volte; cioè che a^2 equivale ad $a \times a$; di maniera che se, per esempio, a val 5, $2a$ val 10; ma però a^2 val 25.

20. Si vede dunque che *per moltiplicar due grandezze monomie che avesser delle lettere comuni, si può abbreviar l'operazione, sommando tutti insieme gli esponenti delle lettere simili del moltiplicando e del moltiplicatore.*

Così per moltiplicare a^5 per a^3 , si scrive a^8 , cioè, che si scrive la lettera a , dandogli per esponente i due esponenti 5 e 3 riuniti insieme. Similmente per moltiplicare $a^3 b^2 c$ per $a^4 b^3 c d$, si scrive $a^7 b^5 c^2 d$, scrivendo alla prima tutte le differenti lettere $abcd$, ed indicando alla prima per esponente 7, ch'è la somma degli esponenti 3 e 4; 5 alla seconda, che è la somma degli esponenti 2 e 3; e 2 alla terza, ch'è la somma degli esponenti 1 ed 1; perchè finalmente a e c non vi è

segnato esponente alcuno , perciò devesi sottintendere che egli è 1 , giacchè c è fattore una sol volta.

Dunque tutte le lettere , che non hanno esponente , si suppone che questo sia 1 ; ed al contrario in quelle lettere che debbono avere 1 per esponente , si fa a meno di notarcelo.

Questa è la regola per le lettere delle quantità monomie.

21. Quando le grandezze monomie son precedute da una cifra , cioè da un coefficiente , bisogna da questo cominciar la moltiplicazione , la qual si fa secondo le regole dell' Aritmetica.

Così per moltiplicare $5a$ per $3b$, si moltiplica prima 5 per 3 , poi a per b , e si ha $15ab$ per prodotto. Parimente se vuolsi moltiplicare $12a'b'$ per $9a'b'$, avrassi $108a'b'$.

Si è detto in Aritmetica , che una grandezza era elevata a prima , seconda , terza ec. potenza , o a primo , secondo , terzo , ec. grado , secondo che essa era fattore una , due , tre , ec. volte ; dunque una lettera che ha per esponente 1 , o 2 , o 3 , o 4 , ec. deve stimarsi elevata alla prima , o alla seconda , o alla terza , o alla quarta potenza ec. così a' è la seconda potenza , o sia il quadrato di a ; a'' è il cubo o la terza potenza di a , e così successivamente.

22. Premesse queste cose, venghiamo alla moltiplicazione delle grandezze composte. Per questa moltiplicazione, bisogna seguire lo stesso metodo usato nell'Aritmetica per la moltiplicazion de' numeri composti da più cifre, cioè, che bisogna moltiplicar successivamente ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, ma osservando però le regole ora stabilite per la moltiplicazion de' monomi. Non si è nell'obbligo, come in Aritmetica, cominciar l'operazione procedendo da destra a sinistra, piuttosto che da sinistra a destra, essendo ciò indifferente, ma si segue quest'ultimo sistema, perchè è più in uso.

E S E M P I O I.

Sia da moltiplicarsi..... $a+b$
 per..... c
 Il prodotto sarà..... $ac+bc$

1.^a Si moltiplica a per c , e'l prodotto è ac (15). 2.^a Si moltiplica b per c , e si ha per prodotto bc ; s'aggiunge questo secondo prodotto al primo per mezzo del segno $+$, e si ha $ac+bc$ per prodotto totale.

Se vi fosse un secondo termine nel moltiplicatore, si moltiplicherebbe indi per questo secondo termine, e si aggiungerebbe questo secondo prodotto al primo.

E S E M P I O II.

Abbiassi da moltiplicare.... $a+b$
 per..... $c+d$
 Il prodotto sarà..... $ac+bc+ad+bd$

Dopo di aver moltiplicato a , e b per c , lo che fa $ac+bc$, si moltiplicherà anche a , e b per d , lo che fa $ad+bd$, che unito al primo prodotto, presenta $ac+bc+ad+bd$. In fatti il moltiplicare $a+b$ per $c+d$, dinota, che non solamente a , ma anche b devesi prender tante volte, quante unità sono in tutta la grandezza $c+d$; cioè, tante volte, quante unità sono in c , più tante volte, quante unità sono in d .

E S E M P I O III.

Propongasi a moltiplicare.... $a-b$
 per..... c
 Il prodotto sarà..... $ac-bc$

Dopo di aver moltiplicato a per c , lo che fa ac , si moltiplica b per c , lo che fa bc ; ma in vece di sommare questo secondo prodotto col primo, se ne sottragga, perchè qui non è la somma delle due grandezze a , e b che devesi moltiplicare, ma soltanto la di lor differenza, giacchè $a-b$ significa che deve sottrarsi b da a ; dunque se si moltiplica a tutta intera, come si è fatto nella prima operazione, è evidente, che ciò che si moltiplica di più di quel che devesi effettivamente moltiplicare, è la grandezza b , di cui la a dev'esser diminuita; bisogna dunque to-

gliere da questo prodotto la grandezza b moltiplicata per c , cioè, togliere bc .

Quest' attenzione è superflua nei numeri, perchè prima di far la moltiplicazione, si farebbe la sottrazione, che qui è indicata nel fattor moltiplicando. Così, per esempio, se debbasi moltiplicare $8-3$ per 4 , si ridurrà prima il fattor moltiplicando $8-3$ a 5 , ed indi si moltiplicherà per 4 . Ma è manifesto ancora, che ottengasi lo stesso risultato, se si moltiplichino direttamente 8 per 4 , dal che si ha trentadue, poi 3 per 4 , che dà 12 , ed indi sottraendo questo secondo prodotto dal primo, avendosi così 20 , come appunto nella prima volta si è ottenuto; or questo secondo metodo, che sarebbe cosa ridicola d'impiegarlo su de' numeri, diviene indispensabile per le grandezze espresse da lettere; dappoichè su di queste non può eseguirsi la sottrazione preparatoria.

ESEMPIO IV.

Propongasi di moltiplicare... $a-b$

per..... $c-d$
 Il prodotto sarà..... $ac-bc-ad+bd$

Si moltiplica prima $a-b$ per c , il qual prodotto è $ac-bc$; indi si moltiplica $a-b$ per d , qual prodotto è $ad-bd$; finalmente si sottrae questo secondo prodotto dal primo, e si ha (11) $ac-bc-ad+bd$ per prodotto totale.

In fatti, giacchè il fattor moltiplicatore è minore di e per d , bisogna dunque prendere il moltiplicando

tante volte, quante unità sono in c diminuita di d : or siccome questa diminuzione non può effettuarsi prima della moltiplicazione, così si prende prima $a-b$ tante volte, quante sono le unità di c , cioè si moltiplica $a-b$ per c ; e poi se ne sottrae $a-b$ presa tante volte, quante sono le unità di d , cioè se ne sottrae il prodotto di $a-b$ per d .

23. Se si fa attenzione ai segni de' termini, che compongono il total prodotto $ac-bc-ad+bd$, ed indi si paragonano coi segni de' termini dei dati moltiplicando, e moltiplicatore; si osserva

1.° Che il termine a preceduto dal $+$, moltiplicato per l'altro c anche preceduto dal $+$, ha dato per prodotto ac pure preceduto dal $+$.

2.° Che il termine b col $-$, moltiplicato pel termine c col $+$, ha dato per prodotto bc col $-$.

3.° Che il termine a col $+$, moltiplicato pel termine d col $-$, ha dato per prodotto ad col $-$.

4.° E finalmente, che il termine b col $-$, moltiplicato pel termine d anche col $-$, ha dato per prodotto il termine bd col $+$.

Dunque, da ora in avanti, potrassi facilmente conoscere nelle parziali moltiplicazioni, se i particolari prodotti debbano essere aggiunti, o tolti; al che basterà praticar le due seguenti regole, che si rilevano dalle già fatte osservazioni.

24. *Se i due termini che debbonsi tra loro moltiplicare, hanno ambidue lo stesso segno $+$,*

o — ; il di lor prodotto avrà sempre il +. Se poi al contrario hanno segni differenti, cioè, uno il +, e l'altro il —, o tutt'alP opposto; il di lor prodotto avrà sempre il —.

Coll'ajuto di queste regole, e di quell'altre stabilite (15, 20, 21, e 22), si è nello stato di fare ogni moltiplicazione algebrica. Ma per procedere con ordine, devesi osservar prima la regola de' segni, poi quella dei coefficienti, e finalmente l'altra delle lettere e degli esponenti.

Un esempio in cui vengono applicate tutte queste regole, terminerà il presente soggetto.

ESEMPIO V.

Propongasi di moltiplicare $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
per..... $a^3 - 4a^2b + 2b^2$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ - 20a^5b + 8a^4b^2 - 16a^4b^3 \\ + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^3b^5 \end{array}$$

Il prodotto
sarà... $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^3b^5$

Si moltiplicano successivamente i tre termini $5a^4$, $-2a^3b$, $+4a^2b^2$ per a^3 primo termine del fattor moltiplicatore. I termini $5a^4$ ed a^3 avendo il medesimo segno, il lor prodotto (24) deve aver il segno +, ma questo segno si traslascia, come appartenente al primo termine del prodotto (7). Si moltiplica in seguito il coeffi-

viente 5 di a^4 per 1 coefficiente di a^3 , e si ha 5; finalmente moltiplicando a^4 per a^3 secondo le regole stabilite (20), cioè, sommando i due esponenti 4, e 3 si ha a^7 , per cui il prodotto è $5a^7$.

Passando al termine $-2a^3b$; per moltiplicarlo con a^4 , si vede che i segni di queste due grandezze son diversi, per cui il lor prodotto deve avere il segno—; si moltiplica indi il coefficiente 2 di a^3b pel coefficiente 1 di a^4 , e finalmente a^3b per a^4 , e si ha $-2a^6b$ per prodotto.

Il termine $4a^2b^2$ moltiplicato per a^4 con una simile operazione, dà $4a^6b^2$ per prodotto.

“ Dopo di aver moltiplicato tutt' i termini del fattor moltiplicando per a^4 ; bisogna moltiplicarli per $-4a^2b$ secondo termine del fattor moltiplicatore. Il termine $5a^4$ moltiplicato per $-4a^2b$ di differente segno, offre $-20a^6b$; il termine $-2a^3b$ moltiplicato per $-4a^2b$ dell'istesso segno, dà $8a^5b^2$; e'l termine $+4a^2b^2$ moltiplicato per $-4a^2b$ di differente segno, esibisce $-16a^4b^3$.

Finalmente si passa a moltiplicare pel termine $+2b^3$, e seguendo le stesse regole, si ha $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ per terzo prodotto parziale.

Badando che fra tutt' i differenti prodotti parziali, che si son trovati, essendovi de' termini simili, cioè, composti dalle stesse lettere con i stessi esponenti, se ne fa la riduzione sommando quelli, che hanno lo stesso segno, e sottraendo gli altri di segni contrarj, avendosi finalmente così il total prodotto $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

25. Come importa assuefarsi colla pratica di

questa regola, così, per esercizio de' Principianti, si è quì seggiunta una tavola che contiene varj esempj. Verranno nello stesso tempo aggiunte diverse osservazioni sopra alcuni di que sti.

Nel primo di essi devesi moltiplicare $a+b$ che generalmente rappresenta la somma di due grandezze, per $a-b$ che generalmente rappresenta la di lor differenza, e si ha per prodotto a^2-b^2 , che è la differenza del quadrato della prima su quello della seconda, o per la differenza de' quadrati di queste due grandezze. Può dunque stabilirsi generalmente, che *la somma di due grandezze, moltiplicata per la di lor differenza, esibisce costantemente per prodotto, la differenza dei quadrati di queste stesse grandezze.* Così, presi due numeri qualunque, per esempio, 5 e 3, vedesi che 8 somma di essi, moltiplicata per 2 lor differenza, offre 16, che effettivamente è la differenza di 25 quadrato del 5, su di 9 quadrato del 3. Ed al contrario, *la differenza de' quadrati di due grandezze, può sempre considerarsi, come il prodotto della di lor somma, nella di lor differenza.* Così la grandezza b^2-c^2 , che è la differenza del quadrato di b su quello di c , risulta dal moltiplicare $b+c$ per $b-c$. Queste due proposizioni saranno utili in seguito.

Di già può rilevarsi di passaggio, ua degli usi dell' Algebra per scoprire delle verità generali.

Il secondo esempio dimostra d' una maniera generale, e semplice, ciò che in Aritmetica si è detto sulla formazione del quadrato, cioè, *che il quadrato di $a+b$ somma di due grandezze, si compone da*

a^2 quadrato della prima, da $2ab$ doppio prodotto della prima moltiplicata per la seconda, e da b^2 quadrato della seconda.

Il terzo esempio conferma ciò che si è detto anche in Aritmetica sulla formazione del cubo. Vi si osserva $a^3 + 3ab^2 + b^3$ quadrato di $a + b$, che dopo di esser moltiplicato per $a + b$, dà $a^4 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ in cui il primo termine è il cubo di a , il secondo che è lo stesso che $3a^2 \times b$, è il triplo del quadrato di a moltiplicato per b ; e così pure, che $3ab^2$ è il triplo di a moltiplicato pel quadrato di b ; e finalmente b^3 è il cubo di b .

26. Per dinotar la moltiplicazione tra due grandezze composte, è in uso di rinserrar ciascuna di esse tra due parentesi, e d'interporvi un de' segni di moltiplicazione, di cui si è parlato (14), qualche volta non vi s'interpone alcun segno; così per dinotare che tutta la grandezza $a + 3ab + b^2$ devesi moltiplicare per tutta l'altra grandezza $2a + 3b$, si scrive $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$, o pure $(a^2 + 3ab + b^2) (2a + 3b)$, o semplicemente $(a^2 + 3ab + b^2) (2a + 3b)$. Qualche volta in vece di scriver ciascuna grandezza tra due parentesi, si sottopone ognuna ad una barra nel seguente modo, $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$.

27. Vi son molti casi, ne' quali è più vantaggioso accennar la moltiplicazione, che eseguirla. Su di quest'oggetto regole generali dar non

si possono, perchè ciò dipende dalle particolari circostanze di ciascuna operazione: in seguito saranno osservati varj di questi casi. L'uso allora lo farà distintamente conoscere. Frattanto può generalmente stabilirsi d'indicar le moltiplicazioni, allorchè queste debbono esser seguite dalla divisione, giacchè tale operazione eseguen-
dosi spesso, col sopprimere soltanto i fattori comuni al dividendo ed al divisore, come vedrassi, distinguonsi con più chiarezza questi comuni fattori, allorchè la moltiplicazione si è soltanto indicata.

Della Divisione.

28. Il modo di far quest' operazione in Algebra, dipende assai dai segni, che si è convenuto impiegare per la moltiplicazione. D'altronde l'oggetto è quello stesso dell' Aritmetica.

29. Allorchè la grandezza da dividersi, non ha alcuna lettera comune col divisore, in tal caso non è possibile d' eseguir l' operazione; per cui non può che indicarsi, lo che eseguesi segnando il divisore al di sotto del dividendo, in forma di fratto, separandoli con un tratto.

Così per indicare, che devesi dividere a per b , scrivesi $\frac{a}{b}$, e si pronuncia a divisa per b ; per dino-

tar poi che devonsi dividere $aa + bb$ per $c + d$, si

$$\text{nota } \frac{aa + bb}{c + d}.$$

30. Allorchè il dividendo ed il divisore, sono monomj, se tutte le lettere che sono nel divisore, trovansi egualmente nel dividendo, la divisione può esattamente farsi, e si esegue colla seguente regola. . . . *Sopprimansi nel dividendo tutte le lettere ch' egli ha comuni col divisore; il quoziente si otterrà nelle rimanenti lettere.*

Così per dividere ab per a , si sopprime a nel dividendo ab , ed hassi b per quoto: Per dividere abc per ab , sopprimesi ab nel dividendo, e si ha c per quoto.

In fatti, poichè (15) le lettere scritte senza interporvi alcun segno, sono i fattori della grandezza da lor costituita; perciò le lettere del divisore, che son comuni al dividendo, son dunque suoi fattori; dippiù si è veduto (*Aril. 69*), che dividendosi un prodotto per un de' suoi fattori, ottiensi l'altro fattor per quoto; il quoto dunque costar deve delle lettere del dividendo, non comuni tra questo ed il divisore.

31. Da ciò ne segue, che essendovi degli espo-

nenti, la regola da seguirsi si è di togliere l'esponente di ogni lettera del divisore, dall'esponente di simil lettera del dividendo.

Così nel dividere a^3 per a^2 , togliasi 2 da 3, restandovi 1, per cui si ha per quoto a^1 , o sia a . Similmente, dovendosi dividere $a^4b^3c^2$ per a^2bc , si ha $a^2b^2c^1$.

In fatti $\frac{a^3}{a^2}$ è lo stesso che $\frac{aaa}{aa}$, che riducesi ad a

per la regola data (30), togliendone le lettere comuni al dividendo ed al divisore. Poichè dunque il quoto, generalmente, aver deve le lettere, che son comuni al dividendo, ed al divisore; perciò l'esponente di ciascuna lettera del quoto, dev'esser la differenza dell'esponente di lei nel dividendo, sull'altro che la stessa ha nel divisore.

32. Dunque se una lettera ha lo stesso esponente sì nel dividendo, che nel divisore, essa avrà zero per esponente nel quoto.

Così a^3 divisa per a^3 dà a^0 ; a^3b^3c divisa per $a^3b^3c^3$, dà $a^0b^0c^0$, o sia ab^0c^1 .

In questo caso può farsi di meno scriver le lettere che han 0 per esponente; perchè ciascuna di queste val quanto l'unità. In fatti, allorchè dividesi a^3 per a^3 , cercasi quante volte a^3 contenga a^3 , ed essendo evidente che la contiene una volta, dunque il quoto dev'essere 1; ma, per altra parte, a^3 divisa per a^3 dà per quoto a^0 , dunque a^0 vale 1. In somma, ogni

grandezza che ha per esponente il 0, vale 1.

35. Se alcune lettere del divisore non rinvengonsi anche nel dividendo, o se taluni esponenti del divisore son maggiori di quelli delle simili lettere del dividendo, allor non può farsi esattamente la divisione: ed in tal caso bisogna indicarla, come si è detto di sopra (29). Ma però puossi render più semplice un tal quoto, o pure il fratto che lo esprime. Perciò la regola da seguirsi, si è di sopprimere nel dividendo e nel divisore le lettere ad essi comuni; in modo che se esse han degli esponenti diversi, si cassa quella, cui compete il minore, e si lascia quell'altra che ha il maggiore, diminuito però questo di quanto è il minore.

Per esempio, se propongasi dividere a^5bc^3 per $a^2b^3c^4$, si scriverà $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$, che ridurrassi nel seguente modo; cioè si cancellerà a^2 nel divisore, e si scriverà soltanto a^3 nel dividendo, si cancellerà b nel dividendo e si scriverà solamente b^2 nel divisore; finalmente si cancellerà c^3 nel dividendo, e la sola c si scriverà nel divisore; in modo che si avrà $\frac{a^3}{b^2c}$. Similmente $\frac{a^5b^5c^3}{a^4b^3c^4}$ riducesi a $\frac{b^2c}{ad}$.

Se con queste operazioni non restasse lettere

alcuna nel dividendo, bisognerà scriver l'unità,

Così $\frac{a^2}{a^1}$ riducesi ad $\frac{1}{a}$.

Facilmente si comprende la ragion di queste regole, da ciò che già si è detto; perchè il sopprimere lo stesso numero di lettere nel dividendo e nel divisore, equivale a dividere per una stessa grandezza, ciascun de' due termini del fratto ch' esprime il quoto: lo che non altera in modo alcuno il valore d' un tal fratto, mentre che lo rende soltanto più semplice (*Arit. 89*).

34. Fin quì non son riguardati i coefficienti, che possono avere il dividendo ed il divisore, o ambidue. Ma però la regola che loro spetta, è di dividerli come nell' *Aritmetica*; e se tal divisione non può farsi esattamente, lasciassi sotto forma di fratto, il qual, potendo, riducesi a minimi termini (*Arit. 92*).

Per esempio, dividendosi $8a^2b$ per $4a^1b$, si divide 8 per 4, e si ha 2 per quoto; dividendosi poi a^2b per a^1b , si ha per quoto a ; per cui il quoto totale è $2a$.

Dividendosi pure $8a^2b^2$ per $6ab$, scrivesi $\frac{8a^2b^2}{6ab}$, che si riduce a $\frac{4a^1b}{3}$.

35. La regola ora stabilita (33) è generale, tan-

to se il dividendo e' l divisore sien monomj, quanto se composti, o polinomj, purchè in questo secondo caso, le lettere comuni al dividendo ed al divisore, lo siano egualmente a tutt' i termini separati dai segni + e -.

Così dovendosi dividere $a^3 + 4a^2b - 5ab^2$ per $a - 5ab$, il quoto $\frac{a^3 + 4a^2b - 5ab^2}{a^3 - 5a^2b}$, si ridurrà ad $\frac{a^3 + 4a^2b - 5ab^2}{a - 5b}$, sopprimendo a^2 ch' è comune fattore di tutt' i termini del dividendo e del divisore.

36. Se 'l dividendo e 'l divisore son composti, non possono darsi regole generali, per conoscere colla sola ispezione, se la divisione possa, o no farsi esattamente. Per assicurarsene e nel tempo stesso trovare il quoto, bisogna far la seguente operazione.

1°. Disponansi il dividendo e 'l divisore in una stessa direzione, e si *ordinino* i loro termini per rapporto ad una stessa lettera comune ad ambedue, cioè, scrivansi per ordine di grandezza i termini, in cui questa lettera tien gli esponenti successivamente più piccoli.

2°. Disposti in tal modo il dividendo e 'l divisore, si separino con un tratto, e si cominci la divisione dal solo primo termine, del pro-

posto dividendo ; seguendo pel primo termine del divisore le regole recate di sopra (30, 31, e 34) , e si scriva il quoto sotto del divisore.

3°. Si moltiplichi tutto il divisore pel quoto che si è trovato, e si porti il prodotto sotto del dividendo , ma però cambiandovi i segni.

4°. Sotto di tutto si tiri una linea , e nel dividendo , e nel prodotto si faccia la riduzione de' termini simili, scrivendone al di sotto il residuo per cominciar dell' istesso modo una seconda divisione , prendendo per primo termine quello, de' termini restanti, che ha il più grand'esponente.

Quì debbonsi riguardare i segni degli adoprati termini del dividendo e del divisore ; la regola è simile a quella della moltiplicazione, cioè che

Se il dividendo e' l divisore hanno lo stesso segno , il quoziente avrà il +

Se poi , al contrario, hanno segni diversi, il quoto avrà il —.

Questa regola de' segni , è stabilita sul principio (*Arit. 74*), che il quoto moltiplicato pel divisore , riproduce il dividendo. Bisogna dunque che il quoto abbia segni tali, che moltiplicandolo pel divisore, riproduca il dividendo coi stessi segni , or questa condizione porta per necessaria conseguenza l' esposta regola.

Per proceder con ordine , si comincerà dai segni , indi si divideranno i coefficienti , e finalmente le lettere.

E S E M P I O.

Propongasi di dividere $aa-bb$ per $b+a$.

Si ordinino il dividendo e 'l divisore relativamente ad una delle due lettere a e b , per esempio , relativamente ad a , e si scrivano come qui sotto.

Dividendo.....	$\begin{array}{r} aa-bb \\ -aa-ab \\ \hline ab-bb \\ +ab+bb \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{l} \frac{a+b}{a-b} \\ \text{Quoziente} \end{array}$
Residuo.....		
Residuo.....	0	

Essendo il segno del primo termine aa del dividendo , lo stesso di quello del primo termine a del divisore , dev'esi porre $+$ al quoto; ma perchè questo è il primo termine , perciò si può trascurare il segno $+$.

Dividasi aa per a , si ha per quoto a , che scrivesi sotto del divisore.

Poi si moltiplicano i due termini a e b del divisore , pel primo termine a del quoto , e scrivonsi i prodotti aa ed ab sotto del dividendo , col segno $-$, opposto a quello ottenuto dalla moltiplicazione , perchè tali prodotti debbon sottrarsi dal dividendo ,

Si fa la riduzione cancellando i due termini aa e $-aa$, che si distruggono ; rimane $-ab$, che unita alla rima-

nente porzione $-bb$ del dividendo, compone ciò che resta a dividersi.

Si continua la divisione, prendendo $-ab$ per primo termine del nuovo dividendo.

Nel dividersi $-ab$ per a , si scrive $-a$ al quoto, perchè i segni del dividendo e del divisore son differenti; in quanto alle lettere; il quoto è b , il qual si scrive appresso del primo quoto.

Si moltiplicano i due termini a e b del divisore, per termine $-b$ del quoto; il prodotto è $-ab-bb$; che, cambiandovi i segni, scrivesi $+ab+bb$ sotto la rimanente porzione del dividendo. Si fa la riduzione cassando le parti simili e di segno contrario: e siccome non vi resta niente così si conchiude che $a-b$ è il quoto.

Si sarebbe potuto ordinare il dividendo e 'l divisore anche relativamente alla lettera b , ed allor si avrebbe dovuto dividere $-bb+aa$ per $b+a$, ed oprando dello stesso modo, si sarebbe ottenuto per quoto $-b+a$, grandezza ch'è la stessa di $a-b$.

Prima di passare al seguente esempio, è molto a proposito che i Principianti si esercitino sugli esempj della quì annessa Tavola, pagina 33.

37. Se dopo di aver ordinato il dividendo, e 'l divisore riguardo ad una stessa lettera, si trovasser più termini in cui questa avesse lo stesso esponente; i medesimi si disporranno in una stessa colonna verticale, come vedesi nel seguente esempio; ed in questa disposizione si baderà di ordinare tutt' i termini di ciascuna colonna, riguardo ad un' altra medesima lettera.

E S E M P I O.

Propongasi di dividere $19a^2b^2 + 13a^2b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ per $-3ab - 5a^2 + bb$. Si ordinino il dividendo, e'l divisore relativamente alla lettera a , e si ha $-20a^4 + 13a^2b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$, da dividersi per $-5a^2 - 3ab + bb$; ma siccome sonovi de' termini con a^2 , degli altri con a^3 , e degli altri con a , così dispongansi essi come vedesi qui sotto, ordinando i termini di ciascuna colonna relativamente a b .

Dividendo	Divisore
$\left\{ \begin{array}{l} -20a^4 + 13a^2b + 19a^2b^2 - 5ab^3 \\ \quad -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ +20a^4 + 12a^2b - 4a^2b^2 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} -5a^2 - 3ab + bb \\ 4a^2 - 5ab + 2ac \\ \hline \text{Quoto} \end{array}$
Residuo $\left\{ \begin{array}{l} +25a^2b + 15a^2b^2 - 5ab^3 \\ -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ -25a^2b - 15a^2b^2 + 5ab^3 \end{array} \right.$	
Residuo $\begin{array}{l} -10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \\ +10a^3c + 6a^2bc - 2ab^2c \end{array}$	
Residuo 0	

Si proceda indi all' operazione , dividendo $-20a^4$ primo termine del dividendo per $-5a^2$ primo termine del divisore. Fatta quest' operazione secondo le regole superiori, si ha per quoto $+4a^2$, o semplicemente $4a^2$, giacchè questo è il primo termine; ed esso si noti al quoto.

Si moltiplichin poi tutt' i tre termini del divisore

successivamente per $4a^2$, e cambiati i segni a questi prodotti, si scrivan sotto del dividendo; avendosi così $20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2$, il che contratto coi termini del dividendo, si ha per residuo, e quindi per nuovo dividendo $+25a^3b - 10a^2c + 15a^2b^2 - 6a^2bc - 5ab^3 + 2ab^2c$.

Si seguiti la divisione, prendendo $+25a^3b$ per dividendo, e si ha per quoto $-5ab$, che si noti anche nel quoto; si moltiplichino i tre termini del divisore per questo secondo termine $-5ab$ del quoto, e cambiati i segni a questi prodotti, si scrivan poi sotto del secondo dividendo, e si ha $-25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3$, qual quantità contratta col secondo dividendo; si ha per residuo, o per terzo dividendo $-10a^2c - 6a^2bc + 2ab^3c$.

Si passi ad una terza divisione, prendendo $-10a^2c$ per dividendo; e si ha $+2ac$ per quoto; si facciano la moltiplicazione, i cambiamenti di segno, e la riduzione come sopra, e non rimane niente; per cui il quoto è $4a^2 - 5ab + 2ac$.

38. Accade sovente che una grandezza risultante da varie e differenti operazioni, possa esprimersi pel prodotto da eseguirsi tra i fattori di una moltiplicazione; quando ciò ha luogo, spessissimo è vantaggioso di dargli una tal forma. Benchè però il metodo generale per rinvenire tali fattori dipenda da cose che in appresso si spiegheranno, pure é di ben l'osservare, che allor quando si è acquistata una certa attitudine nella moltiplica-

zione e divisione , che in molti casi ciò possa facilmente eseguirsi.

Per esempio, se debbasi sommare $5ab - 3bc + a^2$, con $3ab + 3bc - 2a^2$, si ha $8ab - a^2$, che per la lettera a che è comun fattore dei due termini $8ab$, ed a^2 , può esser considerata come risultante dal prodotto di $8b - a$ per a , e quindi che può esprimersi per $(8b - a) \times a$. È molto utile di esercitarsi in questa specie di decomposizioni.

Del modo di rinvenire il massimo comun divisore di due grandezze litterali.

39. Il modo di trovare il massimo comun divisore di due grandezze litterali, è analogo a quello esibito pe' numeri (*Arit.* 95.). Dopo di aver ordinato le due grandezze relativamente ad una stessa lettera, dividasi quella in cui questa lettera ha il più grand' esponente, per l'altra, e si continui la divisione, finchè quest' esponente nella prima grandezza, non più sia maggiore di quel che è nella seconda. Indi, colle stesse condizioni, dividasi la seconda pel residuo di questa divisione. Dividasi poi il primo residuo pel secondo, e così in seguito il precedente residuo si divida pel nuovo, finchè siasi giunto ad una divisione esatta: allora l' ultimo divisore impiegato, è il cercato massimo comun divisore. La dimostrazione poggia su dei stessi principj stabiliti in Aritmetica (95).

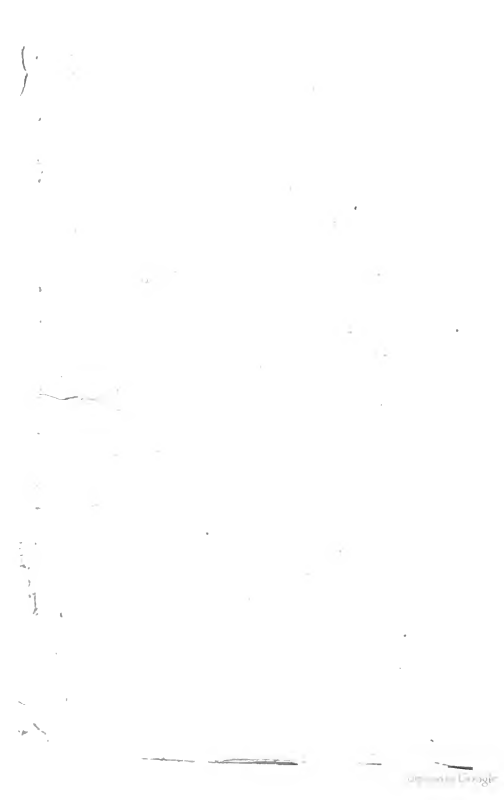
i Moltiplicazione.

$$\begin{array}{r}
 a^3 + 2a^2b + b^3 \\
 a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + a^2b^2 \\
 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
 4a^3 - 5a^2b + 2b^3 \\
 \hline
 20a^3 - 16a^2b + 20a^2b^2 - 12a^2b^3 \\
 15a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\
 0a^3b^3 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\
 \hline
 20a^3 - 41a^2b + 50a^2b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5
 \end{array}$$

di Divisione.

$$\begin{array}{r}
 a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 \left\{ \begin{array}{l} 4a^3 + 5ab + b^3 \\ 2a^3 - 3ab \end{array} \right. \\
 a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 \\
 \hline
 -12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 \\
 + 12a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$



Prima di praticar questa regola , si farà un' osservazione , che può facilitarne l'uso : essa consiste in ciò, che non cambiassi il comun divisore di due grandezze, allor che alcuna di esse si moltiplica , o si divide per una grandezza, che non è divisore dell' altra, o che con questa non ha alcun comune divisore. Per esempio, ab ed ac hanno a per comun divisore: se si moltiplica ab per d , ottiensì abd , che con ac non ha altro comun divisore che a , cioè quello stesso che giaceva tra ab , ed ac .

Non è lo stesso però , se si moltiplichì ab per una grandezza che fosse divisore di ac , o pur che avesse con questa un comun divisore: per esempio, se si moltiplichì ab per c , ottiensì abc , che serba per comun divisore con ac , la stessa ac . Parimente, se si moltiplica ab per cd , che ha un comun divisore con ac , si ha $abcd$; di cui il comun divisore con ac è ac .

40. Da ciò rilevasi 1.^o, che, se cercandosi il massimo comun divisore di due grandezze, nel decorso delle divisioni che successivamente si faranno si vede, che il dividendo, o il divisore abbia un fattore o divisore, che non sia fattore anche dell'altro; si potrà sopprimere un tal fattore.

2.^o Che può moltiplicarsi una delle due grandezze per qual' altra si voglia, purchè questa non sia fattore o divisore della rimanente, o non abbia alcun divisore comune con essa.

★

La regola e le osservazioni ora esibite, vengon qui appresso subito applicate.

Suppongasì che si cerchi il massimo comun divisore di $aa-3ab+2bb$ ed $aa-ab-2bb$. Si divida la prima per la seconda: si ha 1 per quoto, e $-2ab+4bb$ per residuo. Si passa dunque a dividere $aa-ab-2bb$, pel residuo $-2ab+4bb$; ma come questo tien per fattore $2b$, che non è fattore del nuovo dividendo, così sopprimesi un tal fattore $2b$, e restringesi l'operazione a trovare il comun divisore di $aa-ab-2bb$, e di $-a+2b$; cioè a dividere $aa-ab-2bb$ per $-a+2b$; e poichè la divisione è esatta, coneludesi perciò che $-a+2b$ è il massimo comun divisore delle due proposte grandezze.

Per secondo esempio, propóngasi di rinvenire il massimo comun divisore delle due grandezze $5a^3-18a^2b+11ab^2-6b^3$, e $7a^3-23ab+6b^3$. Bisognerà dunque dividere la prima di queste due grandezze, per la seconda; ma come 5 non è divisibile esattamente per 7, così si moltiplicherà la prima per 7, il qual non essendo fattore di tutt'i termini della seconda, il comun divisore non verrà in modo alcuno alterato. Si dovrà dunque dividere $35a^3-126a^2b+77ab^2-42b^3$, per $7a^3-23ab+6b^3$. Nel fare tal divisione, si ha 5a per quoto, e $-11a^2b+47ab^2-42b^3$ per residuo. E siccome l'esponente di a nel dividendo è ancora uguale a quello di a nel divisore, così può continuarsi la divisione; ma però è chiaro che per la stessa anzidetta ragione, bisogna moltiplicare il dividendo per 7; di più da altra parte rilevasi che può togliersi b da tutt'i termini di $-11a^2b+47ab^2-42b^3$, perchè essa non è comun fattore di tutt'i termini del divisore $7a^3-23ab+6b^3$; per cui in seguito di queste osservazioni, divider devesi $-77a^2$

$+329ab-294b^2$, per $7a^2-23ab+6b^2$; eseguita tal divisione, si ha—11 per quoto, e $76ab-228b^2$ per residuo. Indi si passa a dividere $7a^2-23ab+6b^2$, che finora si è adoprato per divisore, pel residuo $76ab-228b^2$, o piuttosto per $76a-228b$. Ed affinchè possa farsi tal divisione, bisognerà moltiplicar la prima di queste due grandezze per 76; ma prima di eseguir questa moltiplicazione, bisogna esplorare se 76 non sia fattore di tutta la grandezza $76a-228b$, o se non vi sieno de' fattori comuni. Or si osserva che 76 non entra tre volte in 228; e siccome esso non è fattore di $7a^2-23ab+6b^2$, così nel divisore $76a-228b$, si sopprime il fattor 76, e dev'esi $7a^2-23ab+6b^2$ dividere soltanto per $a-3b$; qual divisione eseguita, giacchè non rimane niente, dev'esi concludere, che sia $a-3b$ il massimo comun divisore delle due proposte grandezze.

Delle Frazioni litterali.

41. Le frazioni litterali vengono calcolate colle stesse regole delle frazioni numeriche, applicandovi però nello stesso tempo le altre regole precedentemente quì date in riguardo all'addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione. E poichè facil ne riesce quest'applicazione, perciò si farà con somma brevità.

42. Il fratto $\frac{a}{b}$, senza mutar valore, può esser trasformato negli altri $\frac{ac}{bc}$, o $\frac{aa}{ab}$, o pure $\frac{aa+ab}{ab+bb}$, e così in seguito.

In fatti, quest' ultimi non sono altro che il primo, i di cui termini sonosi moltiplicati per c nel primo caso, per a nel secondo, e per $a+b$ nel terzo, lo che non ne cambia sicuramente il valore (*Arit.* 88).

43. Il fratto $\frac{aac}{abc}$, è lo stesso che $\frac{a}{b}$; l'al-

tro $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$, è lo stesso che $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Lo che

è evidente (*Arit.* 89), per essersi divisi i due termini del primo per ac , ed i due termini dell' altro per $3a^2$. Del rimanente questa riduzione de' fratti alla loro più semplice espressione, vien compresa in ciò che si è detto (55).

44. La regola più generale e sicura per ridurre un qualunque fratto a minimi termini, si è di dividere i suoi due termini pel di loro massimo comun divisore, il qual si trova col metodo esposto (59).

45. Per ridurre un intero e fratto ad un sol fratto, bisogna moltiplicar l'intero pel denominatore del fratto, come appunto in Aritme-

tica. Per esempio, $a + \frac{bd}{c}$ può commutarsi in

$\frac{ac+bd}{c}$. Così pure $a + \frac{cd-ab}{b-d}$, riducesi ad

$\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, moltiplicando l'intero a pel

denominatore $b-d$.

Se, dopo di aver eseguito tali operazioni, rinvenngansi de' termini simili, non deve tralasciarsi di ridurli; così nell'ultimo esempio la

grandezza $a + \frac{cd-ab}{b-d}$ trovasi mutata nell'al-

tra $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, che si riduce a $\frac{-ad+cd}{b-d}$

o sia $a \frac{cd-ad}{b-d}$, cancellando i due termini ab ,

e $-ab$ che distruggonsi.

46. Per ricavare da un fratto gli interi, che mai possonvi essere, praticasi, come in Aritmetica, dividendo, fin che si può, il numeratore pel denominatore, seguendo le regole stabilite per

la divisione; così la grandezza $\frac{3ab+ac+cd}{a}$, può

ridursi a $3b+c+\frac{cd}{a}$; parimente la grandezza

$\frac{a^2+4ab+4bb+cc}{a+2b}$, si riduce ad $a+2b+\frac{cc}{a+2b}$,

dividendo il numeratore pel denominatore $a+2b$.

47. La stessa regola dell'Aritmetica si adopra per ridurre più fratti litterali allo stesso deno-

minatore : così per ridurre allo stesso denominatore i tre fratti $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, si moltiplicano i due termini a e b del primo, pel prodotto df dei denominatori degli altri due fratti, e si ha $\frac{adf}{bdf}$. Similmente si moltiplicano i due termini c e d del secondo, per bf prodotto degli altri due denominatori, e si ha $\frac{bcf}{bdf}$; finalmente moltiplicansi i due termini e ed f dell'ultimo, per bd prodotto dei denominatori degli altri due, e si ha $\frac{bde}{bdf}$, di modo che i tre fratti dati ridotti allo stesso denominatore, divengono $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

Della stessa maniera si opererà, se i fratti proposti fosser composti nei numeratori, o nei denominatori, o in ambidue, ma osservando però le regole della moltiplicazione delle grandezze composte. Così, ridotti i due fratti $\frac{b+c}{a+b}$, ed

$\frac{a-2c}{a-b}$ allo stesso denominatore, essi divengono

$\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, ed $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, col mol-

tiplicare i due termini del primo per $a-b$, ed i due termini del secondo per $a+b$.

48. Nel caso che i denominatori abbiano un comun fattore, o divisore, possono i fratti ridursi allo stesso denominatore, con una regola più semplice della generale: per esempio, se abbiansi i due fratti $\frac{a}{bc}$, e $\frac{d}{bf}$; si conosce che

i due denominatori divengono i stessi, se si moltiplica il primo per f , e 'l secondo per c , giacchè così ambidue riduconsi a bcf ; per cui convien moltiplicare i termini del primo fratto per f , e gli altri del secondo per c ; avendosi

così $\frac{cf}{bcf}$, e $\frac{cd}{bcf}$, che son più semplici di $\frac{alf}{bbcf}$, e $\frac{bcd}{bbcf}$, che si sarebbero ottenuti colla regola

generale. Se vi fossero i tre fratti $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$,

si conosce che i lor denominatori riduconsi tutti a $bcfg$, se il primo si moltiplica per fg , il secondo per cg , e l'ultimo per bf ; onde debbonsi moltiplicare i termini del primo fratto per fg , quelli del secondo per cg , e gli altri dell'ultimo per bf , giacchè così essi vengon ridotti tutti allo stesso denominatore, ed espressi

dai seguenti $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{d cg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

Questo è applicabile anche alle frazioni numeriche, se, però i denominatori di esse decompongansi nei lor fattori. Per esempio $\frac{5}{12}$, e $\frac{7}{16}$ son lo stesso che $\frac{5}{4 \times 3}$, e $\frac{7}{4 \times 4}$; si moltiplicano dunque i due termini della prima per 4, ed i due termini della seconda per 3, e si hanno $\frac{20}{48}$, e $\frac{7}{48}$.

49. Per ciò che spetta all'addizione ed alla sottrazione, quando sonosi ridotti i fratti allo stesso denominatore, non deve farsi altro, che sommare, o sottrarre i loro numeratori. Così i due fratti $\frac{b+c}{a+b}$, ed $\frac{a-2c}{a-b}$, ridotti allo stesso denominatore, ne offrono $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, ed $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$; se dunque voglion sommarli, si avrà $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, che riducesi a $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Al contrario, se vuol sottrarsi il secondo dal primo,

si avrà $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bo}{aa-bb}$,

che riducesi a $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

50. Osservisi di passaggio , che per sottrarre il secondo fratto , si son cambiati soltanto i segni del numeratore. Se nello stesso tempo si mutino i segni del numeratore e del denominatore, il fratto non cangiasi , e quindi in vece di toglierlo , si aggiunge ; in fatti $\frac{a}{b}$ è lo stesso che $\frac{-a}{-b}$, secondo le regole date (36).

51. Per moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, si scriverà $\frac{ac}{bd}$, moltiplicando numeratore per numeratore , e denominatore per denominatore , conformemente alle regole dell'Aritmetica ; similmente $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$, darà $\frac{1}{4}ab$.

Se debbasi $\frac{a}{b}$ moltiplicar per c , potrà considerarsi c , come se fosse $\frac{c}{1}$, lo che riduce la moltiplicazione al caso precedente , e ne dà $\frac{ac}{b}$; ma ve-

desi che questo riducesi a moltiplicare il numeratore per l'intero c ; dunque da ora innanzi si serberà la seguente regola, cioè *per moltiplicare un fratto per un intero, o un intero per un fratto, bisogna moltiplicare il numeratore per l'intero, e serbar lo stesso denominatore.*

Se l' numeratore, e l' denominatore fosser composti, vi si applicherà la regola della moltiplicazion delle grandezze composte.

52. Per dividere $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$; l' operazion riducesi (*Arit. 109*) a moltiplicare $\frac{a}{b}$ per $\frac{d}{c}$, lo che si fa colla regola precedente, e ne dà $\frac{ad}{bc}$.

E per dividere $\frac{a+b}{c+d}$ per $\frac{c+d}{a-b}$, ciò riducesi a moltiplicare $\frac{a+b}{c+d}$ per $\frac{a-b}{c+d}$, dal che si ottiene $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, o pure $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$, o finalmente, eseguendo la moltiplicazione accennata nel numeratore, $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

Se, finalmente, debbasi dividere $\frac{a}{b}$ per c ,

potrà considerarsi c come se fosse $\frac{a}{1}$, lo che riduce a moltiplicarsi $\frac{a}{b}$ per $\frac{1}{c}$, come nel caso precedente, avendosi così $\frac{a}{bc}$; donde rilevasi, che per dividere un fratto per un intero, bisogna moltiplicare il denominatore per l'intero, e ritenere il numeratore.

Dell' Equazioni.

53. Per dinotar che due grandezze sono uguali, separansi l'una dall'altra con questo segno $=$, che si esprime colla parola *uguale*, o pure col motto *è uguale a*; così quest' espressione $a=b$, si pronuncia dicendo *a uguale b*, o pure *a è uguale a b*.

L' unione di due o più grandezze così separate col segno $=$, dicesi *Equazione*. Tutte le grandezze insieme riunite che sono a sinistra del segno $=$, costituiscono ciò che dicesi *primo membro* dell' equazione; e tutte le altre che sono a destra di questo stesso segno, formano il di lei *secondo membro*. Nell' equazione $4x-3=2x+7$, il primo membro è $4x-3$, e $2x+7$ è il secondo. L' equazioni sono di un grandissimo

uso pel risolvimento de' problemi che posson proporsi sulle grandezze.

Tutt' i problemi che possonsi risolvere coll' Algebra , serban sempre nella loro enunciazione, o esplicitamente , o implicitamente , un certo numero di condizioni , che sono altrettanti mezzi idonei a far capire i rapporti , che serbano le grandezze ignote alle note da cui dipendono. Questi rapporti, come si vedrà in appresso , possonsi sempre esprimere con equazioni , nelle quali le grandezze cognite ed incognite trovansi tra lor combinate in un modo più o men composto , secondo che il problema è più o men difficile.

In questa maniera , per risolvere coll' Algebra i problemi che possonsi proporre sulle grandezze , vi bisognan tre cose.

1.^o Capir dall' enunciazione , o dalla natura del problema i rapporti esistenti tra le grandezze cognite , e le incognite. Questa è una facoltà che lo spirito acquista, come molte altre, per forza d' uso ; nè su tale oggetto possono stabilirsi regole generali.

2.^o Esprimere ciascun di tali rapporti con un' equazione. Questa condizion può ridursi ad una sola regola , che in seguito sarà esposta ; ma l' applicazione n' è più o men facile , secondo la natura dei problemi , e secondo l' abi-

lità ed esercizio che può aver colui che intraprende a risolverli.

5.^o Isnodar questa, o queste equazioni, cioè, rilevarne il valore delle grandezze incognite. Quest' ultimo punto è suscettibile d' un numero determinato di regole: e da lui si dà principio.

Come i problemi che può aversi a risolvere, posson condurre ad equazioni più o men composte, così queste si son divise in più classi o gradi, che distinguonsi dall' esponente della grandezza, o delle grandezze incognite che vi sono: quest' equazioni si faran conoscere, secondo che più si avanzerà: quelle che a bella prima vengono a considerarsi, sono *l' equazioni del primo grado*. Chiamansi così le equazioni, nelle quali le incognite non son moltiplicate nè per se stesse, nè tra loro.

Dell' Equazioni del primo grado ad una sola incognita.

54. Risolvere un' equazione, si è di ridurla ad un' altra, in cui l' incognita, o la lettera che la rappresenta, si ritrovi sola in un membro, mentre che nell' altro sienvi tutte le grandezze note.

Per esempio, se sia proposto questo proble-

ma. *Trovare un numero il di cui quadruplo aggiunto a 3, dia quanto il suo triplo aggiunto a 12.* Nel rappresentare un tal numero per x , il suo quadruplo sarà $4x$, il quale aggiunto a 3 fa $4x+3$, da altra parte il triplo di questo stesso numero x è $3x$, il quale aggiunto a 12 fa $3x+12$; e giacchè $4x+3$ far deve quanto $3x+12$, bisogna che il numero x sia tale, che abbiasi $4x+3=3x+12$; e questa è l'equazione che trattasi di risolvere, per rinvenire il chiesto numero.

Ora è evidente, che siccome le due grandezze separate dal segno $=$, sono uguali, così esse ancora il saranno, se togasi $3x$ da ciascuna, lo che riduce l'equazione ad $x+3=12$; finalmente queste due anche saranno uguali, se da ciascuna si tolga lo stesso numero 3, lo che dà $x=9$, e risolve il problema; poichè è evidente, che x è cognita, perchè uguale ad una grandezza cognita 9.

L'oggetto che quì si propone, si è di dar le regole per ricondurre, in tutt'i casi l'equazione ad aver, come quì sopra, in un membro soltanto l'incognita, e tutte le grandezze cognite nell'altro. Per un problema così semplice, come quello che ci siam proposti per esempio, l'uso dell'equazioni sarebbe, senza dubbio, superfluo; ma tutt'i problemi non son sicu-

ramente così facili; e quì per ancor non trattasi di altro, che di far capire, in che modo debbasi far trovare la sola incognita in un membro, e tutte le grandezze note nell' altro, affinchè così risolta ne venga l' equazione.

Le regole per risolvere l' equazioni delle quali quì si tratta, cioè per ridurle ad aver solo l' incognita in un membro, riduconsi a tre, che son relative ai tre differenti modi, con cui l' incognita può trovarsi avvinta, o impegnata colle quantità cognite.

Da ora innanzi le grandezze incognite si rappresenteranno per qualcuna delle ultime lettere x, y, z dell' Alfabeto, per distinguerle dalle grandezze cognite, che saran rappresentate, o con numeri, o colle prime lettere dell' Alfabeto.

55. L' incognita può trovarsi in tre modi avvinta con grandezze note; 1.^o per addizione o sottrazione, come nell' equazione $x+3=5-x$. 2.^o Per addizione, sottrazione, e moltiplicazione, come nell' equazione $4x-6=2x+16$. 3.^o Finalmente per addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione, come nell' equazione $\frac{2}{3}x-4=\frac{1}{2}x+17$; o per queste due ultime operazioni soltanto, o pure solamente per l' ultima.

Ecco le regole che bisogna seguire per isviluppar l' incognita in questi differenti casi.

56. *Per trasportar qualunque termine di*

un'equazione da un suo membro in un altro; bisogna cancellar questo termine nel membro in cui è, e notarlo nell'altro col segno contrario a quel che aveva. A qual proposito bisogna ricordarsi, che un termine che non ha alcun segno, stimasi come se avesse il +.

Per esempio nell'equazione $4x+3=3x+12$, se si vuol far passare il termine $+3$ nel secondo membro, si scrive $4x=3x+12-3$, ove vedesi che il termine 3 non istà più nel primo membro; ma però che esso trovasi nel secondo col segno— opposto al + che aveva nel primo.

Riducendo tal'equazione, si ha $4x=3x+9$; se vuoi si ora far passare nel primo membro il termine $3x$ si scriverà $4x-3x=9$, che riducendo, diviene $x=9$.

Del pari, se nell'equazione $5x-7=21-4x$, vogliasi trasportare il termine -7 nel secondo membro; si scrive $5x=21-4x+7$, che riducesi a $5x=28-4x$; e volendosi in seguito trasportar $4x$, si scrive $5x+4x=28$, che ridotta, si ha $9x=28$. Tra poco si vedrà, come si finisce di risolvere una tal'equazione.

Si capisce facilmente la ragion di questa regola. Poichè, se le grandezze che costituiscono il primo membro, prese insieme, pareggian le altre che ne costituiscono il secondo, è evidente, che quest'uguaglianza non resti in alcun modo turbata, se uno stesso qualunque termine, aggiungasi ad ambi i membri, o pur tolgasene; ma quando si

cancella un termine che ha il $+$, allora il termine in cui è, resta di altrettanto diminuito; per cui bisogna diminuir l'altro membro di una ugual quantità, cioè scriverci un tal termine col $-$. Al contrario, quando cancellasi un termine che ha il $-$, è manifesto che di altrettanto aumentasi il membro in cui egli è; per cui di un' ugual grandezza bisogna aumentar l'altro, cioè scriverci questo termine col $+$.

57. Adunque è manifesto, che, con questa regola, possansi trasportar subito tutt' i termini incogniti in un membro, e tutte le grandezze note nell'altro. Alla prima si fissi in qual membro vogliansi i termini incogniti; poichè ciò è indifferente; suppongasì volerli nel primo. Si scriverà nuovamente l'equazione, badando di conservare ai termini incogniti, che erano nel primo membro, i stessi segni che avevano; appresso a questi si scriveranno i termini incogniti, che erano nel secondo membro, ma badando però di mutarli i segni: indi si scriverà il segno $=$, e si comporrà poi il secondo membro, scrivendo i termini noti che in esso erano, coi stessi segni che avevano, ed indi i termini noti che erano nel primo membro, ma coi segni contrarj a quelli che avevano. In tal modo l'equazione $7x-8=14-4x$ diviene $7x+4x=14+8$, o sia $11x=22$. Parimente l'equa-

zione $ax+bc-cx=ac-bx$, diviene $ax-cx+bx=ac-bc$.

58. Per effetto di questa trasposizione può accadere, che dopo la riduzione, ciò che rimane delle x abbia il segno —; per esempio se abbiassi $3x-8=4x-12$; trasportando tutte le x nel primo membro, si avrebbe $3x-4x=-12+8$, che riducesi a $-x=-4$; allor non si fa altro, che cambiare i segni dell' uno e dell' altro membro, lo che nel presente caso, ne dà $+x=+4$, cioè $x=4$. In fatti erasi ugualmente padrone di trasportar le x nel secondo membro, lo che avrebbe dato $-8+12=4x-3x$, che riducesi a $4=x$, ch' è lo stesso di $x=4$.

59. Sovente puossi abbreviar la riduzione di un'equazione, se essa è numerica, o se essendo letterale, contenga delle grandezze simili. Se queste in ambi i membri hanno lo stesso segno, se ne cassa una, e l'altra si diminuisce di altrettanto; all'incontro, se han segni diversi, si accresce l'una di quanto è l'altra che si è cancellata. Per esempio, nell'equazione $6b-4a+2x=5a+3x$, si cassa $2x$ nel primo membro, e scrivesi soltanto x nel secondo; si cancella $5a$ nel secondo, e di $5a$ si aumenta $4a$, avendosi così tutt'insieme $6b-9a=x$. È chiaro adunque, se in ambi i membri ritrovinsi de' termini perfettamente uguali, e dello stesso segno, che possansi all'istante sopprimere; di tal

maniera l'equazione $5a+2b=5a+x$, riducesi subito a $2b=x$.

60. Allor che sonosi trasferiti tutt'i termini incogniti di un'equazione in un membro, e tutt'i cogniti nell' altro; se non sonovi fratti, per avere il valor dell' incognita, devesi soltanto eseguire la seguente regola. *Scrivasi la semplice incognita in un membro, e l'altro membro dividasì per la grandezza, che moltiplicava l' incognita nell' anzidetto primo membro.*

Per esempio, nell'equazione $7x-8=14-4x$ trattata di sopra, per la trasposizione e riduzione, si è avuto $11x=22$; per aver si x , non deve farsi altro, che scrivere $x=\frac{22}{11}$, che riducesi ad $x=2$; cioè scriver la sola x nel primo membro, e destinar per divisore del secondo membro, il suo moltiplicatore 11. In fatti, allor che in luogo di $11x$ scrivesi soltanto x , non scrivesi altro che l' undicesima parte del primo membro; dunque, per conservar l' uguaglianza, bisogna scrivere l' undicesima parte del secondo membro, cioè anche divider questo per 11.

Parimente, se propongasì l'equazione $12x-15=4x+25$, dopo di aver trasferito (56) tutte le x in un membro; e le grandezze cògnite nell' altro, si avrà $12x-4x=25+15$, o pur riducendo, $8x=40$, ora per aver la x scrivesi $x=\frac{40}{8}$, che riducesi ad $x=5$. Perchè, quando in vece di $8x$ scrivesi soltanto x , non scrivesi altro che

l'ottava parte del primo membro, dunque per serbar l'uguaglianza, devesi scriver soltanto l'ottava parte anche del secondo membro, cioè scrivere $\frac{40}{8}$.

Se le grandezze note che moltiplicano la x , in vece di esser numeriche, fosser litterali, la regola sarà anche la stessa: così nell'equazione $ax = bc$, per aver x , non deve farsi altro, che scrivere $x = \frac{bc}{a}$.

Se dopo eseguita la trasposizione, vi fosser più termini affetti dall'incognita, la regola pure è la stessa; così nell'equazione $ax + bc - cx = ac - bx$, che si è avuta quì sopra, in seguito della trasposizione, si ha $ax - cx + bx = ac - bc$; or per aver x non deve farsi altro, che scrivere $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$; cioè, scriver solo la x in un

membro, e dar per divisore all'altro la grandezza, che moltiplica x nel primo, la qual nel caso attuale è $a - c + b$, poichè la grandezza $ax - cx + bx$ è la x moltiplicata per l'aggregato delle tre grandezze $a - c + b$.

61. Vedesi adunque, che quando dopo la trasposizione, si han più termini affetti dalla x , per avere il di costei valore, devesi il secondo membro dividere per le grandezze che affettano la x nel primo, tutte prese insieme

con i stessi lor segni, tal quale esse sono. Per esempio, nell'equazione $ax = bc - 2x$, per la trasposizione si ha $ax + 2x = bc$; ed applicandovi l'attual regola, o la divisione, si avrà

$$x = \frac{bc}{a+2}.$$

Similmente l'equazione $x - ab = bc - ax$, per la trasposizione ne dà $x + ax = bc + ab$, per cui $x = \frac{bc+ab}{1+a}$; poichè quì non biso-

gna dimenticarsi (5), che il moltiplicatore di x nel primo termine di $x + ax$, è 1; in fatti in $x + ax$, x si trova una volta di più che in ax .

62. Se si trovasse qualche grandezza, che fosse comun fattore di tutt' i termini di un'equazione; questa potrà semplificarsi, dividendone tutt' i suoi termini per questo comun fattore: per esempio, nell'equazione $15bb = 27ab + 6bx$, se ne divideranno tutt' i suoi termini per $3b$, ch' è lor comun fattore; e si avrà $5b = 9a + 2x$, che, trasponendo, diviene $5b - 9a = 2x$, e che per la divisione finalmente ne dà $\frac{5b-9a}{2} = x$, o sia $x = \frac{5b-9a}{2}$.

63. Le regole ora stabilite han pure luogo, quando i differenti termini dell'equazione abbian de' denominatori, che non contengan però

L'incognita; ma siccome l'applicazione di queste regole è più facile per i principianti, allorchè non vi son fratti nell'equazione, così quì si soggiunge una regola per farne sparire i denominatori.

64. Per commutare un'equazione che abbia denominatori, in un'altra che non li abbia, *bisogna moltiplicar ciascun suo termine intero pel prodotto di tutt' i denominatori in essa esistenti; e moltiplicare il numeratore di ciascun suo termine fratto, pel prodotto dei denominatori di tutt' gli altri termini fratti.*

Per esempio, se abbiasi l'equazione $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$; si moltiplicherà il numeratore $2x$ del fratto $\frac{2x}{3}$ per 35 prodotto degli altri denominatori 5 e 7, ciò che dà $70x$. Si moltiplicherà il termine intero 4, per 105 prodotto di tutt' i denominatori 3, 5, e 7, avendosi così 420. Si moltiplicherà il numeratore $4x$ del fratto $\frac{4x}{5}$, per 21 prodotto degli altri denominatori 3, e 7, e si avrà $84x$. Si moltiplicherà il termine intero 12, per 105 prodotto di tutt' i denominatori, e si avrà 1260. Finalmente, si moltiplicherà il numeratore $5x$ del fratto $\frac{5x}{7}$, per 15 prodotto dei rimanenti denominatori, avendosi così $75x$; in modo che l'equazione proposta; vien cambiata in quest'altra $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$

$420 = 84x + 1260 - 75x$; nella quale, per avere x , basta applicarvi le due precedenti regole. Per la prima (56), si muterà quest'equazione in $70x - 84x + 75x = 1260 - 420$; o pur, riducendo, $61x = 840$; e per la seconda (60), $x = \frac{840}{61}$, che, fatta la divisione, riducesi ad

$$x = 13\frac{47}{61}.$$

La ragion di questa regola facilmente si comprende, se si richiami ciò ch'è stato detto (*Arit. 91.*), per ridurre più fratti allo stesso denominatore. In fatti, se nell'equazion pro-

posta $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, vogliansi ridurre

allo stesso denominatore i tre fratti $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, e

$\frac{5x}{7}$, bisognerà moltiplicare i loro numeratori

per i stessi numeri, per i quali l'attual regola prescrive di moltiplicarli, e fissare a questi nuovi numeratori, per comun denominatore, il prodotto di tutt' i denominatori; in modo che la proposta equazione sarà mutata in quest'altra

$\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, che nell'essenza è la

stessa, poichè (*Arit. 88.*), i nuovi fratti sono i stessi che i primi. Or se anche gli interi vogliansi ri-

durre a fratti, bisogna (*Arit. 86.*) moltiplicar quest' interi pel denominatore del fratto ch' evvi unito, quì, cioè per 105 ch' è stato formato dal prodotto di tutt' i denominatori esistenti nell' equazione ; allor si avrà $\frac{70x+420}{105}$

$$= \frac{84x+1260-75x}{105}; \text{ ma è evidente, che senza}$$

turbar l' uguaglianza , si può da una parte e dall' altra sopprimere il comun denominatore, poichè se tali due grandezze son tra loro uguali trovandosi divise per uno stesso numero, esse il saran pure senza una tal divisione; per cui allor si ha $70x+420 = 84x+1260-75x$, come quì sopra.

65. La regola non è in alcun modo differente, se i varj termini che compongono un' equazione son tutti di grandezze litterali. Bisogna soltanto osservar le regole della moltiplicazion delle grandezze litterali; così nell' equazione

$$\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}, \text{ si moltiplica il nu-}$$

meratore ax pel prodotto cd degli altri due denominatori, lo che dà $acdx$. Poi si moltiplica il termine $+b$, per bcd prodotto di tutt' i denominatori, e si ha $b'cd$. Indi si moltiplica cx per bc , ed ottiensi $bc'x$. Finalmente si

moltiplica ab per bd , e si ha $ab'd$; tal che l'equazion diviene $acd x + b'cd = bc'x + ab'd$, la qual, trasponendo, ne dà $acd x - bc'x = ab'd - b'cd$, e con una divisione (61), ne offre $x = \frac{ab'd - b'cd}{acd - bc'}$.

66. Allorchè i denominatori son composti, le operazioni possonsi soltanto accennare, per indi eseguirsi, e ciò affin di alleviar la mente; lo che meglio si capisce vedendolo indicato nel seguente modo: per esempio se abbiassi $\frac{ax}{a-b}$

$+4b = \frac{cx}{3a+b}$; si scriverà $ax \times (3a+b) + 4b \times (a-b) \times (3a+b) = cx \times (a-b)$; ed eseguendo le indicate operazioni, si avrà $5a^2x + abx + 12a'b - 8ab' - 4b^2 = acx - bcx$; e trasponendo, $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^2 + 8ab' - 12a'b$; e finalmente dividendo (61), $x = \frac{4b^2 + 8ab' - 12a'b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Applicazione de' principj precedenti, al risolvimento di qualche facile problema.

67. Benchè siasi proposto di trattar nella seconda sezione, con qualche dettaglio, degli usi dell'Algebra; pur nondimeno si è creduto a proposito di disporre a quest'usi, coll'applicar presentemente a qualche problema assai facile, i precedenti principj.

Le regole che ora si sono stabilite , bastano a risolvere ogni problema di primo grado , il qual però venga espresso da una sola equazione. Per porre in equazione un problema , si può far uso della seguente regola ; *si rappresenti la grandezza , o le grandezze cercate ciascuna con una lettera ; e dopo di aver esaminato attentamente lo stato del problema , si faccian coll'ajuto de' segni algebrici , su queste grandezze , e su quelle cognite , le medesime operazioni , ed i stessi ragionamenti che si farebbero , se conoscendo i valori delle incognite , si volessen verificare.*

Questa regola è generale , e condurrà sempre a rinvenir l'equazioni che il problema può somministrare. Ma è ben fatto diriggerne l'applicazione con qualche esempio.

Problema primo: *Un padre ed un figlio han tutti due insieme , centò anni : e l' padre ha 40 anni più del figlio : si dimanda l' età di ciascuno ?*

Con una mediocre attenzione, vedesi che'l problema riducesi a questo : Trovar due numeri , che presi insieme faccian 100 , e l' un de' quali ecceda l' altro di 40. Or si capisce facilmente , che conosciuto uno di questi numeri , si rende noto anche l' altro ; poichè , se per esempio , sia noto il maggiore , per avere il minore , non deve farsi altro , che sottrarne 40.

Dunque si rappresenti il maggiore per x ,

Or, se conoscendo il valor di x , si volesse verificare, se ne dovrebbe sottrar 40 per avere il numero minore; indi si riunirebbe il maggiore assieme col minore, per vedere se faccian 100. S'imiti dunque questo modo di procedere.

Il numero maggiore è..... x

Il minor sarà dunque..... $x-40$

Questi due numeri presi insieme fanno... $2x-40$

Ma essi, per la natura del problema, debbon far.....100

Dunque..... $2x-40 = 100$

Per avere il valor di x non deve farsi altro, che applicar le regole stabilite (56 e 60). La prima ne dà

$$2x = 100 + 40, \text{ o pur } 2x = 140, \text{ e la seconda } x = \frac{140}{2}$$

$= 70$; essendosi trovato il numero maggiore x , tolga-sene 40 per avere il minore, il qual sarà 30. E così le due età cercate sono 70, e 30.

Riflettendo sulla strada che si è tenuta per isnodar questo problema, può vedersi che i ragionamenti impiegativi sono indipendenti dai valori dei numeri 100, e 40 che han luogo in esso; e che se, in vece di questi numeri, se ne fosser proposti degli altri, sarebbe bisognato similmente condursi. Così se il problema propongasì in questo modo generale. *Due numeri presi insieme fanno una somma conosciuta ed espressa da a ; questi due numeri differiscono tra loro per un numero conosciuto espresso da b : essi come si troveranno?*

Rappresentando il maggior con..... x

Dunque il minor sarà..... $x-b$

E tali numeri presi insieme, faranno.... $2x-b$

Ma secondo il quesito, essi debbon comporre il numero a ; dunque dev'esser $2x - b = a$.

Trasponendo, si ha $2x = a + b$, e dividendo $x = \frac{a+b}{2}$, o pure $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Cioè, che per avere il maggiore, bisogna prendere la metà di a , ed aggiungervi la metà di b ; lo che ne insegna, che quando si ha la somma a di due numeri incogniti, e la lor differenza b , si avrà il maggior di essi prendendo la metà della somma, ed aggiugnendovi la metà della differenza.

Poichè il numero minore è $x - b$, dunque esso sarà $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, o pur riducendo ogni cosa ad un sol fratto

(45), esso sarà $\frac{a+b-2b}{2}$; cioè, $\frac{a-b}{2}$, o $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$;

dunque il minor si ha togliendo la metà di b da quella di a ; cioè togliendo dalla metà della somma, la metà della differenza.

Da ciò è manifesto, come rappresentando generalmente, cioè con lettere, le grandezze note che han luogo in questo problema, si perviene a rinvenir regole generali pel risolvimento di tutt' i problemi della stessa specie. Questa regola ora stabilita, è quella di già fissata (*Geom. 301*).

Certi problemi a prima vista spesso sembran differenti, ed intanto dopo un leggiero esame, trovasi che essi differiscon solo nell' enunciazione. Per esempio, se propongasì questo problema.

Dividere un numero dato ed espresso da a, in due parti, delle quali una sia minore o maggior dell'altra, per una grandezza data ed espressa da b. È

facile il capire che questo problema val lo stesso che il precedente.

Problema secondo. Dividere il numero 720 in tre parti tali, che la massima superi per 80 la minima, e questa sia dalla media superata per 40.

Riflettendosi qual debba esser la minima, si conosce, che per verificarla, bisogna per una parte aggiungervi 40, acciò abbiassi la media, ed aggiungervi 80 per un'altra parte, acciò abbiassi la massima; ed allor riunendo insieme queste tre grandezze, la lor somma dovrà necessariamente far 720.

Dunque chiamisi x la minima, e procedendo similmente, si dirà.

La minima parte è..... x

Dunque la media è..... $x+40$

E la massima è..... $x+80$

Ma queste tre parti insiem sommate fan.. $3x+120$

E pel quesito esse debbon fare.....720

Dunque dev'essere..... $3x+120=720$

Per cui applicandovi le regole qui sopra esposte, si avrà $3x=720-120=600$, ed $x=\frac{600}{3}=200$; dal

che si rileva, che la parte media è 240, e la massima 280; in fatti, queste tre parti insiem sommate, ne fan 720.

Da quest'esempio, ancor chiaramente si rileva, che se i numeri proposti in vece di essere 720, 40, ed 80, fossero stati differenti, il problema sarebbesi sempre potuto risolvere nell'istesso modo; così per isnodar tutt'i problemi nei quali trattasi di dividere un dato numero a in tre parti tali, che l'eccesso della mas-

sima sulla minima sia un numero dato b , e che l'eccesso della media sulla stessa minima sia un altro numero dato c ; ragionando similmente, si dirà:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Rappresentisi la minima per} & \dots\dots\dots x \\
 \text{La media sarà} & \dots\dots\dots x+c \\
 \text{E la massima} & \dots\dots\dots x+b \\
 \text{Ma queste tre parti riunite fan} & \dots\dots\dots 3x+b+c \\
 \text{Ed il valor di tutte tre insieme è} & \dots\dots\dots a \\
 \text{Dunque dev' essere} & \dots\dots\dots 3x+b+c=a \\
 \text{Per cui trasponendo} & \dots\dots\dots 3x=a-b-c \\
 \text{E dividendo} & \dots\dots\dots x=\frac{a-b-c}{3}
 \end{array}$$

Cioè, che per aver la parte minima, bisogna dal numero che si vuol dividere, torne i due eccessi, e prendere il terzo di ciò che resta: ed allor le altre due parti facilmente si determinano. Così, se chiesi di divider 642 in tre parti tali, che la media superi la minima per 75, e che la stessa minima sia superata dalla massima per 87; si sommeranno i due eccessi 75 ed 87, che danno 162; si sottrarrà 162 da 642, del residuo 480 si prenderà la terza parte 160, questa sarà la parte minima. Per cui le altre due poi saranno $160+75$, o sia 235, e $160+87$, o sia 247.

Del resto, i due problemi che or si son proposti per esempio, non han certamente bisogno del soccorso dell'Algebra; ma la di lor semplicità è propria a far chiaramente vedere il modo, con cui deve farsi uso de' principj che or si sono stabiliti, per porre in equazione un problema.

Problema terzo: *Dividere un numero dato, per esempio 14250, in tre parti che sien tra loro come*

i numeri 3, 5, ed 11; cioè, di cui la prima sia alla seconda :: 3: 5, e la prima sia alla terza :: 3: 11.

Se si conoscesse una delle parti, per esempio, la prima, ecco come si verificherebbero.

Con una regola del tre (*Aril. 194*), si cercherà un numero che sia a questa prima parte :: 5: 3; questo sarà la seconda parte. Similmente si cercherà un altro numero che stia a questa stessa prima parte :: 11: 3; questo sarà la terza parte; sommando queste tre parti, esse dovranno fare 14250. S' imiti dunque questo modo di procedere.

La prima parte chiamisi

Per trovar la seconda, si rinvenga il quarto proporzionale in ordine a 3, 5, ed x ; il qual sarà $\frac{5x}{3}$,

e ne esprimerà tal parte.

Per rinvenir la terza parte, si determini il quarto proporzionale in ordine a 3, 11, ed x il qual sarà $\frac{11x}{3}$, e ne dinoterà tal parte.

Queste tre parti prese insieme fanno $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$,

e sia $x + \frac{16x}{3}$.

Ma, pel dato, esse debbon fare 14250; dunque dev' essere $x + \frac{16x}{3} = 14250$.

Per avere il valor di x , si fa disparire (64) il denominatore 3, e si ha $3x + 16x = 42750$, o sia $19x = 42750$; dunque (60) dividendo per 19, $x = \frac{42750}{19}$

= 2250. La seconda parte essendo $\frac{5x}{3}$, sarà dunque

$$\frac{5 \times 2250}{3} = \frac{11250}{3} = 3750; \text{ e la terza parte che è } \frac{11x}{3},$$

$$\text{sarà } \frac{11 \times 2250}{3} = \frac{24750}{3} = 8250; \text{ in fatti, queste tre parti}$$

prese insieme fanno 14250; da altra parte i tre numeri 2250, 3750, ed 8250, son tra loro come i tre numeri 3, 5, ed 11, lo che facilmente si vede dividendo i tre primi per lo stesso numero 750, qual cosa non ne cambia affatto il lor rapporto (*Arit. 170*).

Se il numero da dividersi, in vece d'essere 14250, ne fosse un altro qualunque; il qual generalmente si rappresenti per a , e che i numeri proporzionali alle parti in cui vuol dividersi, in vece di essere 3, 5, ed 11, fosser generalmente tre numeri noti ed espressi colle lettere m, n, p ; è chiaro, che dovrà imitarsi perfettamente ciò che or si è fatto.

Così, rappresentandosi la prima parte con..... x

Per aversi la seconda, dovrà determinarsi il quarto proporzionale in ordine ad m, n, x ; il qual sarà

$$\frac{nx}{m}, \text{ e questa sarà la seconda parte.}$$

E per aver la terza parte, si troverà il quarto proporzionale in ordine ad m, p, x ; il qual sarà $\frac{px}{m}$, e

questa sarà la terza parte.

Dunque queste tre parti prese insieme faranno $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, cioè $x + \frac{nx+px}{m}$; ma esse debbon costituire

$$a; \text{ dunque dev' essere } x + \frac{nx+px}{m} = a.$$

Togliendo il denominatore , si ha $mx + nx + px = ma$; e quindi dividendo (61), $x = \frac{ma}{m+n+p}$, lo che

ne dà l'opportunità di far rimarcare l'utilità dell'Algebra , per diacoprir regole di calcolo.

Se vogliasi determinare il quarto proporzionale in ordine ad $m+n+p$, m , ed a ; questo sarà (Arit. 79)

$\frac{am}{m+n+p}$; e poichè si è trovato che x ne pareggia

la stessa grandezza, perciò concludesi che , per avere x , bisogna ritrovarne il quarto proporzionale in ordine alla somma delle parti proporzionali , alla prima di queste , ed al numero dato , ch'è quello che vuol dividersi ; e questa è appunto la regola che si stabilì (Arit. 197).

Problema quarto. Da Dreux si è fatto partire per Brest un corriere , che fa due leghe in ogni ora. Otto ore dopo la sua partenza , se n'è fatto partir da Parigi un altro anche per Brest , il qual fa tre leghe anche in ogni ora. Si dimanda ove questo incontrerà il primo? Sapendosi però da altra parte , che sonovi 17 leghe da Parigi a Dreux.

Se dicasi , quante leghe debba fare il secondo corriere per raggiungere il primo? Un tal numero si verificherà in questo modo. Si cercherà quanta strada ha dovuto fare il primo nel tempo che , per raggiungerlo , ha camminato il secondo , e siccome le di loro strade percorse nello stesso tempo , son proporzionali alle lor velocità , cioè al numero di leghe ch'essi fan rispettivamente in ogni ora , così troverassi tale strada del primo , determinando il quarto proporzionale in ordine a 3 , 2 , ed al numero delle leghe percorse dal se-

condo. Trovatosi questo quarto proporzionale, vi si aggiungerà il numero di leghe che il primo corriere ha dovuto fare nelle otto ore in cui anticipatamente si è mosso, e finalmente anche le diecisette leghe, che sonovi di più da Parigi a Dreux; il tutto n'esibirà il numero di leghe percorse dal secondo. Si proceda dunque dell'istessa maniera, esprimendo per x il numero di leghe che farà il secondo corriere.

Per trovare il numero di leghe che fa il primo, mentre il secondo fa x , si trova in ordine a 3, 2, ed x , il quarto proporzionale, il quale è $\frac{2x}{3}$; ora

lo stesso primo corriere nelle otto ore in cui anticipatamente si è mosso, a ragion di 2 leghe l'ora, ha dovuto fare sedici leghe; e poichè sonovi diecisette leghe da Parigi a Dreux, sommando queste tre grandezze, si avrà $\frac{2x}{3} + 16 + 17$; o sia $\frac{2x}{3} + 33$ per la

strada che avrà dovuto fare il secondo corriere, allorchè egli raggiungerà il primo. Ma si è supposto che in tal caso egli avrà fatto x leghe, dunque dev'essere

$$\frac{2x}{3} + 33 = x.$$

Dunque non deve farsi altro, che determinar la x mediante le regole già stabilite. Perciò da tal'equazione tolga si il denominatore, ed essa (64) si commuta nell'altra $2x + 99 = 3x$. Trasponendo tutte le x nel secondo membro, ed indi riducendo, si ha $99 = x$; cioè, che i due corrieri s'incontreranno, dopo che il secondo avrà percorso 99 leghe, o pure a 99 leghe da Parigi.

In fatti mentre il secondo fa 99 leghe, il primo

ne fa 66, perchè questo fa 2 leghe, ogni ora, mentre che quello ne fa tre; ma esso ha già fatto 16 leghe di più, perchè si è partito 8 ore prima del secondo, e dippiù è per 17 leghe più vicino a Brest di Parigi, perchè si è partito da Dreux; dunque egli troverassi in tutto per 99 leghe lontan da Parigi, quando il secondo per altrettanto saranne discosto, per cui essendo ambidue nello stesso luogo, s'incontreranno.

Riflettendosi un poco rilevasi, che il modo di ragionare ed oprare nell'esposto problema sia lo stesso, sebbene sien differenti i numeri impiegativi per i suoi dati. Generalmente, rappresentisi dunque con a la distanza dei due luoghi di partenza, la quale era 17 leghe nel problema precedente: con b il numero delle ore, pel quale la partenza del primo corriere precede quella del secondo; e con c e d i numeri di leghe, che i medesimi fan rispettivamente in ogni ora.

Se rappresentisi sempre per x il numero di leghe, che far deve il secondo corriere per incontrare il primo, sarà x ancor composta dall'intervallo giacente tra i due luoghi di partenza, dalla strada che può fare il primo nel numero b di ore, e finalmente dalla strada che farà il medesimo in tutto il tempo che l'altro camminerà.

Per determinare quest'ultima strada, riflettasi che i due corrieri camminando allora nello stesso tempo, debban percorrere vie proporzionali alle lor velocità; per cui suppostasi esser x la strada percorsa dal secondo, s'avrà l'altra fatta dal primo nello stesso tempo, determinando il quarto proporzionale in ordine a d , c , ed x , il qual sarà dunque $\frac{cx}{d}$ (Arit. 179). Ma

poichè si è supposto che tal primo corriere faccia ogni ora il numero c di leghe, perciò egli nel numero b di ore farà un numero di leghe espresso da bc .

Uniscansi dunque immantinente i tre numeri di leghe espressi rispettivamente da $\frac{cx}{a}$, bc , ed a , la lor

somma $\frac{cx}{a} + bc + a$ sarà la strada percorsa dal secondo

corriere; ma essa si è supposta $= x$, dunque $x = \frac{cx}{a} +$

$bc + a$. Togliendo il denominatore, si ha $dx = cx + bcd + ad$; trasponendo, sarà $dx - cx = bcd + ad$; e finalmente dividendo (61), si ha $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, qual'e-

quazione risolve tutt' i problemi di questa specie, almeno quando si suppone che i due corrieri camminino per la stessa direzione, e che il men veloce di essi parta prima dell' altro.

Per dimostrar l' uso di questa formola, riprendasi l' esempio precedente, e si ricordi, che in questo caso a dinota 17 leghe; cioè, $a = 17^1$, $b = 8^0$, $c = 2^1$, $d = 3^1$. In tal caso il valor generale della x di-

viene $x = \frac{17 \times 3 + 8 \times 2 \times 3}{3 - 2} = \frac{51 + 48}{1} = 99$, come di sopra.

L' uso di queste soluzioni generali dunque è tale, che sostituendo in luogo delle lettere i numeri, che esse son destinate a rappresentare, e facendo le operazioni indicate dalla loro disposizione, e dai loro segni; si esegue così la risoluzione di tutt' i particolari problemi della stessa specie.

Per esempio: se propongasi quest' altro problema: *L' indice delle ore in un orologio corrisponde a 17*

minuti, mentre che l'altro dei minuti corrisponde a minuti 24, cioè che son 3^{re}, 24^{ma}: dimandasi a qual numero di ore e minuti questi due indici si distenderanno l'un sull'altro?

Poichè l'indice delle ore, e quell'altro dei minuti si muovono unitamente nello stesso tempo, perciò la grandezza b , con cui si è rappresentato il tempo del quale la partenza di un corriere precede quella dell'altro, è zero nel presente caso. La distanza dei due luoghi di partenza, presentemente è la strada che l'indice dei minuti far deve, per venire dalla ventiquattresima division del quadrante, alla diciassettesima, cioè che $a = 53$ divisioni: or mentre l'indice dei minuti percorre tutte le 60 divisioni, quello dell'ore ne percorre soltanto 5; per cui $c = 5$, e $d = 60$. Poichè $b = 0$, dalla

formola $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ deve rigettarsi il termine bcd ,

o sia $bc \times d$, perchè zero moltiplicato per qualunque grandezza, fa sempre zero. Dunque nel caso attuale

$x = \frac{ad}{d - c}$; e sostituendo per a , d , o i lor valori,

ha $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = 57 \frac{45}{55} = \frac{9}{11}$, cioè, che bisognerà che

l'indice dei minuti percorra ancora 57 divisioni e

$\frac{9}{11}$, così, poichè esso corrisponde alla ventiquattresima divisione,

perciò corrisponderà a divisioni 81

$\frac{9}{11}$; cioè i due indici saran l'uno sull'altro a 21^{re}

$\frac{9}{11}$ dell'ora seguente, o sia a 4^{re}, 21^{re} $\frac{9}{11}$, giacchè 60

divisioni costituiscono un intero giro , o sia un'ora.

Il vantaggio delle soluzioni letterali su di quelle numeriche , non consiste soltanto in ciò , che per ognuno porticolar problema non occorre far altro , che *sostituir dei numeri* ; ma spesso , con certi apparecchi rendonsi esse suscettibili di un'enunciazione semplice e facile a ritenersi. Per esempio, la formola $x = \frac{ad+bcd}{d-c}$,

che or si è trovata, è appunto in tal caso : la grandezza d'essendo fattor comune dei due termini del numeratore, puossi il valor di x scrivere in questo modo , $x = \frac{(a+bc)d}{d-c}$; or sotto di questa forma si può osservare,

che il valor di x è il quarto termine d'una proporzione di cui i tre primi sarebbero $d-c$, d , $a+bc$; ma di questi tre termini il primo $d-c$ indica la differenza delle velocità dei due corrieri , il secondo d dinota la velocità del secondo corriere , e l terzo $a+bc$ è composto dall'intervallo a dei due luoghi di partenza , e dalla grandezza bc , o $c \times b$ ch' esprime quante leghe fa il primo corriere nel numero di ore che egli ha di anticipazione ; in modo che $a+bc$ dinota tutto il vantaggio che ha il primo corriere sul secondo ; dunque il risolvimento del problema puossi ridurre alla seguente enunciazione. Si moltiplichi la strada che in ogni ora fa il primo , pel numero d'ore ch' egli ha di anticipazione , ed aggiunto ciò alla distanza dei due luoghi di partenza ; in ordine alla differenza delle velocità dei due corrieri , alla velocità del secondo , ed alla somma ottenuta poc' anzi che ne dinota tutto il vantaggio che ha il primo corriere sul secondo , trovisi il quarto proporzionale,

questo disegnerà il numero di leghe che dovrà fare il secondo corriere per incontrare il primo. Così nel primo superiore esempio, avendo il primo corriere 8 ore di anticipazione, e facendo 2 leghe per ora, debbonsi dunque aggiungere 16 leghe a 17 leghe, le quali ultime ne indicano la distanza dei due luoghi di partenza, avendosi così 33. Devesi dunque in ordine a 3—2, 3, e 33, o sia in ordine ad 1, 3, e 33 trovare il quarto proporzionale, il quale è 99, come qui sopra.

68. Del rimanente se sianvi delle frazioni, o nò, la regola è sempre la stessa. Per esempio, se il primo corriere faccia 7 leghe in 4 ore; il secondo 13 leghe in 5 ore: se il primo corriere abbia 15 ore di anticipazione; e finalmente se la distanza dei due luoghi di partenza fosse di 42 leghe, si dirà: Poichè il primo corriere fa sette leghe in 4 ore, cioè $\frac{7}{4}$ di lega in ogni ora; e 'l secondo del pari si

rileva che fa $\frac{13}{5}$ di lega in ciascuna ora; dunque nelle 15 ore di anticipazione che ha il primo, egli deve fare leghe $15 \times \frac{7}{4} = \frac{105}{4}$ di lega, a ragion di $\frac{7}{4}$ di lega per ora, le quali aggiunte a 42 leghe, fanno leghe $42 + \frac{105}{4} = \frac{273}{4}$ di lega; si determini dunque il quarto

termine di quest' analogia $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4}$; questo

quarto proporzionale sarà $\frac{\frac{13}{5} \times \frac{273}{4}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}} = \frac{3549}{20}$ (*Arit. 106*),

e (riducendo i duefratti inferiori allo stesso denominatore),

$$\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{52-35}{20}}, \text{ o } \frac{\frac{3549}{20}}{\frac{17}{20}}, \text{ o (Arit. 109) } \frac{3549}{20} \times \frac{20}{17}, \text{ o finalmente}$$

$\frac{3549}{17}$, perchè trascurando il 20 comun fattore del nu-

meratore e del denominatore, non cambiasi il valor della frazione. Ma $\frac{3549}{17} = 208 \frac{13}{17}$, dunque questo è il numero di leghe ch'è obbligato di fare il secondo corriere.

*Riflessioni sulle grandezze positive, e
le negative.*

69. Auor che sonosi in tal modo generalmente risolti tutt' i problemi di una stessa specie, può spesso farsi uso di queste formole generali per risolvere altri problemi nei quali le condizioni saran tutte opposte a quelle, che si è avuto in mira di soddisfare: sovente basta un semplice cambiamento di + in -, o di - in +, praticato nei segni delle grandezze. Ma prima di far conoscere questo nuovo uso dei segni, bisogna considerarli sotto d' un nuovo aspetto.

Le lettere non rappresentano, che l'assoluto valore delle grandezze. I segni + e - finora non han rappresentato, che le operazioni dell' ad-

dizione, e della sottrazione; ma essi posson benanche, in più casi, dinotare il modo con cui le grandezze le une alle altre riferisconsi.

Una stessa grandezza può esser considerata sotto due diversi aspetti, cioè, o come capace di accrescere o pur di diminuire un' altra data grandezza. Fin tanto che quella grandezza si rappresenterà o con un numero o con una lettera, niente sicuramente ne dinoterà qual' è quello dei due suddetti aspetti, sotto del quale essa si considera. Per esempio, nello stato di un uomo che avrebbe dei beni, e dei debiti, lo stesso numero può essere impiegato ad esprimere la quantità numerica degli uni e degli altri; ma questo numero, tal quale egli è, non farà in modo alcuno conoscere la differenza degli uni dagli altri. Il mezzo il più naturale per far osservare questa differenza, si è di marcarli con un segno che indica l' effetto che un di essi può produrre sull' altro; ma essendo l' effetto dei debiti quello di diminuire i beni, è dunque molto naturale di dinotarli, applicandovi il segno —.

Parimente se si consideri una linea retta, come generata dallo scorrere di un punto *A* (*fig. 1.*) mosso perpendicolarmente alla retta *BC*, vedesi che questo punto può andare o da *A* verso *D*, o da *A* verso *E*; se rap-

presentisi con a la strada AD , o AE che egli ha percorsa, certamente non viene ancor determinata l'assoluta situazione di questo punto. L'opportuno mezzo di fissarla, si è d'indicar con qualche segno, se la grandezza a dev'esser considerata a dritta o a sinistra; ora i segni $+$ e $-$ sono proprj a quest'effetto; poichè se si consideri il movimento del punto A relativamente al punto L dato e riguardato come termine fisso; allor che il punto A muovesi verso D , ciò che egli descrive tende ad accrescere LA ; ed allor che egli muovesi verso E , all'opposto, ciò che egli descrive, tende a diminuire LA ; è dunque ben naturale di rappresentare AD con $+$ a , o semplicemente con a , ed, al contrario, AE con $-$ a . Sarebbe tutto all'opposto, se in vece di riferire al punto L il movimento del punto A , si fosse rapportato la punto O .

Le grandezze negative esistono dunque tanto effettivamente, quanto le positive, ed esse ne differiscono soltanto in questo, cioè, che nel calcolo prendonsi in un senso tutto contrario.

In un calcolo le grandezze positive, e le negative possonsi trovare, e trovansi spesso mescolate insieme, non solamente perchè certe operazioni conducono a togliere certe grandezze da cert'altre come fin quì si è osservato; ma an-

che perchè spesso nel calcolo si ha bisogno di esprimere i differenti aspetti sotto de' quali consideransi le grandezze.

70. Se dunque dopo di aver risoluto un problema, si dasse che il valor dell' incognita trovato con i sopra esposti metodi, fosse negativo; per esempio, se giungasi ad un risultato come questo $x = -3$, bisognerà conchiuderne, che la grandezza che si è espressa con x , non ha in alcun modo le proprietà supposte faciendo il calcolo, ma però delle totalmente contrarie. Per esempio, se propongasi questo problema, trovare un numero che aggiunto a 15 faccia 10; un tal problema è evidentemente impossibile; intanto se rappresentasi con x il chiesto numero, si avrà quest' equazione $x + 15 = 10$, e quindi in virtù delle superiori regole, $x = 10 - 15 = -5$. Quest' ultima conchiusione fa dunque vedere che x che erasi considerato doversi aggiungere a 15, per far 10, al contrario devesene sottrarre. Così tutte le soluzioni negative indicano qualche falsa supposizione nell' enunciazion del problema; ma nello stesso tempo ne indicano anche la correzione, col dinotare che la grandezza cercata dev' esser presa in un senso tutt' opposto a quello in cui si è presa.

71. Dunque da ciò conchiudesi, che dopo

di aver risoluto un problema, nel quale alcuno grandezze siensi prese in un certo senso, se vogliasi di bel nuovo risolvere, prendendo tali grandezze in un senso totalmente opposto, basterà cambiare a queste soltanto gli attuali lor segni. Per esempio, nel problema quarto risoluto generalmente pel caso, in cui i due corrieri camminino verso la stessa parte, se vogliasi avere il risolvimento di tutt'i problemi che possonsi proporre nell'altro caso, in cui essi vadansi scambievolmente all'incontro, vi si soddisferà cambiando il segno di c nel valor di x , che si è avuto colla seguente equazione $x = \frac{ad+bcd}{d-c}$. In fatti, poichè il primo corriere,

in vece di allontanarsi dal secondo, va ad incontrarlo, perciò esso diminuisce la strada che deve far questo; e propriamente la diminuisce in ragion della strada c , che egli fa in ogni ora; bisogna dunque esprimere che c devesi togliere, in vece di aggiungere; per cui, in vece di $+c$, devesi porre $-c$. Questo cambiamento darà $x = \frac{ad-bcd}{d+c}$; perchè cambiando

nel termine $+bcd$ il segno di c , esso essendo equivalente a $+bd \times +c$, si ridurrà a $+bd \times -c$, cioè a $-bcd$ (24).

Tutto ciò si confermi con un esempio: suppongansi due corrieri che camminano in senso contrario, e partiti da' due luoghi cento leghe lontani tra loro. Il primo si parte sett' ore prima dell' altro, e fa due leghe in ogni ora, mentre che 'l secondo ne fa tre. Chiamando x la strada, che farà questo fino ad incontrar quello, vedesi che x pareggerà la differenza della strada percorsa dal primo, dalla distanza totale: or la strada percorsa da questo, risulta dalla somma di quella che esso può fare in sett' ore, e da quella che percorrerà, durante il cammino del secondo: e per ciò che riguarda quest' ultima strada, essa si determina come quarto proporzionale in ordine a 3, 2, ed x , per cui sarà espressa da $\frac{2x}{3}$; e dippiù la strada

che percorre il primo, nelle sette ore in cui precedentemente si è mosso, è di 14 leghe, a ragion di 2 leghe per ora; dunque egli in tutto avrà fatto il numero di leghe espresso da $14 + \frac{2x}{3}$, quindi il se-

condo non dovrà percorrere altro, che $100 - (14 + \frac{2x}{3}) =$

$100 - 14 - \frac{2x}{3} = 86 - \frac{2}{3}x$: ma la strada da lui per-

corsa si è chiamata x , dunque $x = 86 - \frac{2}{3}x$, per cui

$3x = 258 - 2x$, e $5x = 258$, onde $x = \frac{258}{5} = 51 \frac{3}{5}$.

Or se nella formola $x = \frac{ad-bcd}{d+c}$, che vuoi si di-

mostrar di convenire al caso presente, si sostituisce 100 per a , 7 per b , 3 per d , e 2 per c , si avrà

$$x = \frac{100 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3}{3+2} = \frac{300-42}{5} = \frac{258}{5} = 51 \frac{3}{5},$$

come appunto poc' anzi si è determinato.

In proporzion che più si inoltrerà, si avrà cura di fissar maggiormente l'idea che deve farsi delle negative grandezze.

72. Come importa molto di acquistare la facilità di porre in equazione, così, per esercizio dei Principianti, quì soggiungonsi alcuni problemi facili, esibendosi soltanto i loro risultati, a sol fine di confermarne i saggi. Dopo di aver risoluto in numeri questi problemi, come appunto son proposti, sarà cosa utilissima di esercitarsi a risolverli, sostituendo a numeri le lettere: in tal modo appunto, imitando le particolari soluzioni, acquistasi la facilità di generalizzare ed estender le proprie idee.

Trovare un numero, che aggiunto una volta a 5, ed un'altra a 12, dia due somme, che sien tra loro :: 3 : 4.... Risposta. È 16.

Trovare un numero, la di cui metà, il terzo, ed i $\frac{2}{5}$ tutti presi insieme, l'eccedano di 7.... Risposta. È 30.

Sonovi tre operaji, de' quali il primo fa 5 tese di opera in un giorno, il secondo 7, e'l terzo 8; dimandasi in qual tempo questi tre operaji faran 100

tese , travagliando tutti uniti. . . . Risposta. Giorni 5.

Si è affittato un artefice poltrone , a ragion di 24 soldi per ciascun giorno che travaglierà ; ma con patto, che debba rilasciare , fu di ciò che gli si dovrà , 6 soldi per ciascun giorno che non travaglierà. Dopo 30 giorni egli fa tirare i suoi conti , e si trova che non deve aver niente , si cerca quanti giorni ha travagliato. . . . Risposta. Giorni 6.

Una persona compra un cavallo , che poi vende 90 lire di più di quel che l'ha comprato ; e così si trova di aver guadagnato il 10 per cento sul denaro che ha speso. Si cerca per quanto l'ha comprato. . . . Risposta. Lire 900.

In quindici pagamenti , de' quali ciascuno è stato sempre accresciuto di una stessa quantità , si è corrisposta una certa somma ; e si sa che il primo di essi è stato di 7 lire , e l'ultimo di 37. Si dimanda di quanto è stato accresciuto ciascun pagamento. . .

Risposta. Lire $2\frac{1}{7}$.

Ogni 32 libbre di acqua marina contengono una libbra di sale. Or sonovi appunto 32 libbre di quest'acqua , dimandasi quant'acqua dolce vi si deve mescolare affinchè ne risulti un composto , che in ogni 32 libbre contenga soltanto due onco di sale. . . . Risposta. Libbre 224.

Delle equazioni del primo grado a due incognite.

73. Sia che abbiani più incognite , sia che abbiasene una , il metodo da seguirsi per

potrà in equazione è sempre lo stesso. Ma generalmente, bisogna stabilir tante equazioni, quante ne somministrano le condizioni del problema. Se tali condizioni son tutte distinte ed indipendenti le une dalle altre, e nello stesso tempo, se ciascuna può esprimersi con un'equazione, e dippiù tutte queste equazioni son del primo grado, e tante, quante son le incognite; allora il problema ammette una sola soluzione. Ma se alcuna delle condizioni trovasi esplicitamente o implicitamente compresa in qualche altra di esse, o se il numero delle condizioni è minor di quello delle incognite; allora il numero delle equazioni è minor di quello delle incognite, e 'l problema è suscettibile d'infinite soluzioni, a' meno che non ne limiti il numero qualche particolar condizione, che però non può esprimersi con un'equazione. Tutto ciò sarà rischiarato cogli esempi.

Suppongansi primieramente due equazioni, ed altrettante incognite.

Le regole stabilite relativamente alle equazioni ad una incognita, han luogo egualmente per l'equazioni a più incognite; ma però per l'equazioni a due incognite deve soggiungersi di più la seguente regola.

74. *Prendasi in ciascuna delle due equazioni che si proporranno, il valor di una stessa*

incognita, oprando come se tutto il restante fosse cognito: indi uguagliansi questi due valori, e si avrà così un' equazione che conterrà soltanto l'altra incognita, la qual si determinerà colle regole precedenti. Essendosi determinata questa seconda incognita, sostituisca il suo valore in un d' i due valori poc' anzi ottenuti della prima incognita, e così resterà determinata anche questa.

Per esempio, se abbiani le due equazioni $2x+y=24$, $5x+3y=65$. Dalla prima, trasponendo, otterrassi $2x=24-y$, e dividendo, $x=\frac{24-y}{2}$. Dalla seconda trasponendo, si ha $5x=65-3y$, e dividendo, $x=\frac{65-3y}{5}$.

Uguagliansi i due valor di x , scrivendo $\frac{24-y}{2}=\frac{65-3y}{5}$. Equazion che contiene soltanto la seconda incognita y .

Per avere il valor di y , tolgansi i denominatori 2 e 5 (64); e si ha $120-5y=130-6y$: trasponendo e riducendo, si ha $y=10$.

Per aversi x , nel primo suo valore qui sopra determinato, in vece di y , sostituisca il suo valor 10, lo che esibisce $x=\frac{24-10}{2}=\frac{14}{2}=7$.

75. Prendansi per secondo esempio, le due equazioni $\frac{4x}{5}-\frac{5y}{6}=2$, e $\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=19$

Si cominci dal togliere i denominatori (64) da ciascuna di tali equazioni, lo che le muta in quest'altre due $24x - 25y = 60$, ed $8x + 9y = 228$. Dalla prima di esse, trasponendo, rilevasi $24x = 60 + 25y$, e dividendo, $x = \frac{60 + 25y}{24}$. Dalla seconda, trasponendo,

risulta $8x = 228 - 9y$, e dividendo, $x = \frac{228 - 9y}{8}$.

Aleguinsi questi due valor di x , scrivendosi $\frac{60 + 25y}{24} = \frac{228 - 9y}{8}$; equazion che sol contiene l'incognita y .

Per avere il di costei valore, tolgansi i denominatori, e si ha $480 + 200y = 5472 - 216y$; trasponendo, ne viene $200y + 216y = 5472 - 480$, che riducesi a $416y = 4992$; e finalmente dividendo, ottiensi $y = \frac{4992}{416} = 12$.

Per averti x , in un dei suoi due valori, per esempio, nel primo, in vece di y , sostituiscasi il suo valor 12;

cioè in $x = \frac{60 + 25y}{24}$, lo che ne dà $x = \frac{60 + 25 \times 12}{24} =$

$$\frac{60 + 300}{24} = \frac{360}{24} = 15.$$

76. Scelgansi per terzo esempio le due equazioni $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$, e $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Si cominci dal liberarle dai denominatori (64);

Si ha $56x = 35x + 60y - 1260$.

E $56x - 20y = 35y - 420$.

Dalla prima, trasponendo e riducendo, rilevasi

$$21x = 60y - 1260, \text{ e dividendo, } x = \frac{60y - 1260}{21}.$$

Ed anche trasponendo e riducendo, si ha dalla seconda

$$56x = 55y - 420, \text{ e dividendo, } x = \frac{55y - 420}{56}.$$

Pareggiando questi due valori di x , si ha $\frac{60y - 1260}{21} =$

$$\frac{55y - 420}{56}.$$

In quest' equazione per ottenere il valor di y togliansi i denominatori, avendosi così $3360y - 70560 = 1155y - 8820$; dal che trasponendo e riducendo, risulta $2205y = 61740$; e finalmente dividendo, si ha $y = \frac{61740}{2205} = 28.$

Per determinare il valor di x , nell' equazione $x = \frac{60y - 1260}{21}$ superiormente ottenuta, in vece di y sostit

tuiscasi il suo valor 28; lo che ne offre

$$x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{1680 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20.$$

77. Opererassi similmente, se le equazioni fossero letterali. Così, se abbiani le due equazioni $ax + by = c$, e $dx + fy = e$, in cui a , b , c , d , e , f rappresentin grandezze cognite, positive o negative; trasponendo, si avrà dalla prima $ax = c - by$, e dividendo $x = \frac{c - by}{a}$;

e con simili operazioni, rileverassi dalla se-

conda $dx = e - fy$, ed $x = \frac{e - fy}{d}$. Uguagliando tra loro questi due valor di x , si avrà $\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$, che liberati da fratti, ne danno $cd - bdy = ae - afy$, e trasponendo, $afy - bdy = ae - cd$; e finalmente dividendo (61), si ha $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Per avere x , in un dei due suoi valori, per esempio nel primo, cioè in $x = \frac{c - by}{a}$, bisogna, in vece di y , sostituire il suo valore

$$\frac{ae - cd}{af - bd}; \text{ lo che ne dà } x = \frac{c - b \times \frac{ae - cd}{af - bd}}{a},$$

$$\text{che riducesi ad } x = \frac{\frac{bcd - abe}{af - bd} + c}{a}, \text{ o pure ad}$$

$$x = \frac{\frac{acf - bea - abe + bcd}{af - bd}}{a}, \text{ formando dell'in-}$$

$$\text{tero e fratto, che costituisce il numeratore, un}$$

$$\text{fratto solo (45), o pure ad } x = \frac{\frac{acf - abe}{af - bd}}{a} =$$

$$\frac{acf - abe}{aaf - abd}, (52), = \frac{cf - be}{af - bd}, (53).$$

78. Fin quì si è supposto che in ciascuna

equazione sienvi ambedue le incognite. Se però ciò non succede, il calcolo si farà come i precedenti, ma riuscirà più semplice.

Per esempio, abbiani $5ax = 3b$, e $cx + dy = e$: la prima equazione darà $x = \frac{3b}{5a}$, e l'altra $x = \frac{e - dy}{c}$; e pareggiando questi due valor di x , indi togliendone i denominatori, trasponendo, e dividendo, rilevasi $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

*Delle Equazioni del primo grado, a tre,
o a più di tre incognite.*

79. Una volta che si è ben capito ciò che si è detto, è facile poi il vedere come dovesi oprare, quando è maggiore il numero delle incognite e delle equazioni.

Si supporrà sempre che quelle e queste sien dello stesso numero. Se abbianse tre, si prenderà in ciascuna di esse equazioni il valor d'una stessa incognita, considerando tutto il resto come noto. Indi il primo valore si uguaglierà al secondo ed al terzo; o pure al secondo si uguaglieranno il primo e'l terzo. Si avran così due equazioni a due sole incognite; le quali si tratteranno secondo la precedente regola (74).

Sien, per esempio, le tre equazioni:

$$3x + 5y + 7z = 179$$

$$8x + 3y - 2z = 64$$

$$5x - y + 3z = 75$$

Dalla prima, trasponendo, si ha $3x = 179 - 5y - 7z$; e dividendo, $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

Dalla seconda, si rileva similmente, $8x = 64 - 3y + 2z$; ed $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

E dalla terza, anche così, $5x = 75 + y - 3z$, ed $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Pareggiando il primo, e secondo valor di x , si ha $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

E pareggiando similmente il primo e terzo, si ha $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

E poichè in queste due ultime equazioni sonovi soltanto due incognite; perciò trattinsi esse colla regola data (74). Tolgansi dunque subito i denominatori, e si ha così

$$1432 - 40y - 56z = 192 - 9y + 6z, \text{ ed}$$

$$895 - 25y - 35z = 225 + 3y - 9z.$$

Indi in ciascuna di queste equazioni prendasi il valor di y : e dalla prima, trasponendo e riducendo, si avrà $1240 - 62z = 31y$, ed indi, dividendo, $y = \frac{1240 - 62z}{31}$. E dalla seconda, trasponendo e riducendo; si ha $670 - 26z = 28y$, e dividendo, $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

Uguagliansi questi due valor di y , e si ha $\frac{1240 - 62z}{31}$
 $= \frac{670 - 26z}{28}$, la qual contiene una sola incognita;
 per avere il di cui valore, tolgansi i denominatori,
 e si ha $34720 - 1736z = 20770 - 806z$; e traspo-
 nendo, e riducendo, viene $13950 = 930z$; e final-
 mente, dividendo, si ha $z = \frac{13950}{930} = \frac{1395}{93} = 15$.

Per aversi y , nell' equazione $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, in
 vece di z , pongasi il suo valore 15 ora ottenuto, ciò
 che dà $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{1240 - 930}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Finalmente, per avere x , in un dei suoi tre va-
 lori trovati quì sopra, per esempio, in $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$,
 in luogo di y e z sostituisconsi i lor valori 10, e 15; dal
 che risulta $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{179 - 50 - 105}{3}$
 $= \frac{179 - 155}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

80. Se in ogni equazione non contengansi riu-
 nite tutte le incognite, il calcolo sarà solamente
 più semplice, ma si farà sempre di un' ana-
 loga maniera.

Per esempio, se abbiansi le tre equazioni, $5x + 3y =$
 65 , $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$. La prima darà $x =$
 $\frac{65 - 3y}{5}$, la seconda non offrirà alcun valore di x ; e

la terza esibirà $x = \frac{57-4z}{3}$; per cui non si fa altro, che uguagliar questi due valor di x , avendosi così $\frac{65-3y}{5} = \frac{57-4z}{3}$, equazione in cui non si ravvisa più x , e che maneggiata colla seconda $2y - z = 11$, oprando le regole dell'equazioni a due incognite, darà i valori di y e z . Compiendo il calcolo, si troverà $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

81. Da ciò rilevasi, che se abbiasi un maggior numero di equazioni, sempre con altrettante incognite, la regola generale sarà.... *Prendasi in ciascuna equazione il valor di una stessa incognita, un di questi valori si pareggi con ciascun degli altri, e così si avrà di meno un'equazione ed un'incognita. Si maneggino queste nuove equazioni, come si è fatto colle prime, e si avrà anche un'equazione ed un'incognita di meno. E si continui in tal modo, finchè si prevenga ad un'equazione con una sola incognita.*

82. Può essere che non riesca inutile di stabilir qui una regola generale per determinare i valori delle incognite nell'equazioni di primo grado. Allorché il numero delle incognite è un po'considerabile, e che l'equazioni contengono tuti' i termini che contener possono, se queste son litterali, perviensi col primo metodo a certi valori più composti di quel

che potrebbero essere , a dire il vero posson ridursi , ma è un travaglio tanto più lungo , quanto più è considerabile il numero delle incognite. D'altra parte , il modo d'eliminar l'incognite nell'equazioni superiori al primo grado , sarà in seguito ridotto a quello di eliminarle nell'equazioni dell'istesso primo grado. I metodi che fino al presente sonosi avuti , per eliminar l'incognite nell'equazioni superiori al primo grado , han tutti (eccettuate però soltanto quelli esibiti da Eulero , e Cramer) l'inconveniente di condurre ad equazioni molto più composte di quel che bisogna. Anche quest'ultimi , se le incognite son più di due , non vanno esenti da tale inconveniente. Può esser dunque utile di esibir qui de' mezzi facili per avere i valori delle incognite nell'equazioni del primo grado. Questo è che va a farsi , dopo di aver esposto un secondo metodo , che può essere utilmente impiegato in varie occasioni.

Sieno le due equazioni $3x + 4y = 81$, e $3x - 4y = 9$. Se dalla prima togliesi la seconda , si ha $8y = 72$, e perciò $y = \frac{72}{8} = 9$. All'opposto , se tali equazioni si sommino , si ha $6x = 90$, per cui $x = \frac{90}{6} = 15$.

Vedesi dunque che quando le due equazioni son tali , che in ciascuna il coefficiente di una delle incognite è lo stesso , è facilissimo con una semplice addizione o sottrazione , di ridurre le due equazioni ad avere una sola incognita.

83. Ma si può sempre ricondurre l'equazioni a questo stato ? Sempre si può ; basta per questo di

(92.)

moltiplicare una di esse per un numero convenevole. Ecco in che modo devesi procedere per rinvenire un tal numero. Sienvi le due equazioni $4x + 3y = 65$, e $5x + 8y = 111$.

Esprimasi con m il numero di cui si tratta, e per esso si moltiplichino una di quelle, per esempio la seconda, e si ha $5mx + 8my = 111m$, la qual si sommi colla prima, ottenendosi così $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$, o sia $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Se vogliansi all'istante far disparire le x , basterà supporre $4 + 5m = 0$, lo che ne dà $m = -\frac{4}{5}$.

Questa supposizione riduce l'equazione a $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, d'onde si ha $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$; in quale equazione, ponendovi per m il suo valore $-\frac{4}{5}$,

$$\begin{aligned} \text{risulta } y &= \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = \frac{\frac{325 - 444}{5}}{\frac{15 - 32}{5}} = \frac{-\frac{119}{5}}{-\frac{17}{5}} \\ &= -\frac{119}{5} \times -\frac{5}{17} = \frac{119}{17} = 7. \end{aligned}$$

Se al contrario vogliansi far disparire le y , converrà supporre $3 + 8m = 0$, da cui rilevasi $m = -\frac{3}{8}$;

lo che è ben fatto, perchè essendo uguale a zero il coefficiente di y , un tal termine si annulla, come appunto volevasi. Una tal supposizione riduce l'equazione a $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, che ne offre

$x = \frac{65 + 11m}{4 + 5m}$; in cui per m ponendo il suo at-

tual valore $-\frac{3}{8}$; risulta $x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = \frac{520 - 333}{32 - 15}$

$$= \frac{\frac{187}{8}}{\frac{17}{8}} = \frac{187}{17} = 11.$$

84. Se abbiani tre equazioni, e tre incognite, si moltiplicherà la seconda per un numero m , e la terza per un numero n , e così moltiplicate, aggiugnendole alla prima, si supporrà indi uguale a zero il coefficiente di ciascuna di due delle tre incognite x , y , e z , tra le quali due incognite non sia però compresa quella che vuol determinarsi. Per render noti i valori di m ed n , avransi delle equazioni che si calcoleranno come nel caso precedente.

Prendansi per esempio, le tre già trattate equazioni $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, e $5x - y + 3z = 75$. Moltiplicando la seconda per m , la terza per n , ed aggiugnendole alla prima, si avrà $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$, la qual può scriversi così, $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Se vuol determinarsi z , si supporranno $3 + 8m + 5n = 0$, e $5 + 3m - n = 0$; e vien l'equazione ridotta a $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, da

sui si ha $x = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; dunque non trattasi di altro, che di determinare m ed n , cui si perviene per mezzo delle due equazioni $3 + 8m + 5n = 0$, e $5 + 3m - n = 0$, le quali si tratteranno come nel caso precedente, cioè che si moltiplicherà la seconda per un numero p , ed indi si aggiungerà alla prima, avendosi così $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = 0$, che si scriverà così $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$; per aversi n , dovrà supporre $8 + 3p = 0$, lo che ridurrà l'equazione a $3 + 5p + (5 - p)n = 0$, onde sarà $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; ma l'equazione $8 + 3p = 0$, dà $p = -\frac{8}{3}$; dunque $n =$

$$\frac{-3 + \frac{40}{3}}{5 + \frac{8}{3}}, \text{ che si riduce ad } n = \frac{31}{23}; \text{ con una simile}$$

operazione si troverà $m = -\frac{28}{23}$, e sostituendo tali valori di m ed n in quello di x , si avrà $x = \frac{179 - 64 \cdot \frac{28}{23} + 75 \cdot \frac{31}{23}}{7 - 2 \cdot \frac{-28}{23} + 3 \cdot \frac{31}{23}}$, che si riduce a $x = 15$. Da ciò

si capisce come debba procedersi, se in vece di x , vogliam determinarsi y , o x ; ma quando si è avuta una delle incognite, è inutile di ricominciare un simile calcolo per aver ciascuna delle altre; in tal caso bisogna sostituire il valor di quest' incognita nelle pro-

poste equazioni, ed impiegando un'equazion di meno, si determinano gli altri valori, nell'istesso modo che quando si è avuta un'equazion di meno.

85. Seguendo questo, o l' primo metodo, possiamo stabilirsi delle formole generali, che rappresentano i valori delle incognite in tutti i casi immaginabili. In questa maniera è appunto, che se si rappresentino generalmente due equazioni di primo grado a due incognite con $ax + by + c = 0$, ed $a'x + b'y + c' = 0$, lo che può sempre farsi, passando tutt' i termini in un membro, e rappresentando con una sola lettera la totalità delle grandezze note che moltiplicano ciascuna incognita, e la totalità dei termini interamente cognitivi; che si troverà che i valori di x ed y sono espressi in questo modo: $x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$,

$$y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Parimente, se rappresentinsi tre equazioni del primo grado a tre incognite, con $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, si troverà che i valori di x , y , e z sono espressi in questo modo.....

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

Se abbiansi quattro equazioni del primo grado a

quattro incognite, i valori di queste verranno espressi con quattro frazioni, i di cui numeratori e denominatori costeran ciascuno di 24 termini. Essi avranno 120 termini, se le incognite saran 5; e se le incognite saran sei, essi ne avran 720, e così in seguito; tal che il numero dei loro termini verrà costantemente dinotato dal prodotto dei numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6, ec., i quali numeri debbono esser tanti, quante le incognite.

Vedesi dunque che sarebbe cosa lunghissima di calcolarli uno in seguito dell'altro, seguendo esattamente l'andamento del primo, o del secondo metodo. Un poco di attenzione sulla forma dei valori che si son trovati, e su di quelli che similmente si troveranno per quattro equazioni a quattro incognite, conduce alle qui sotto notate conseguenze, le quali molto facilitano ed abbreviano il calcolo.

1.° I valori delle incognite x , y , z , ec., qualunque sia di queste il numero, han tutti lo stesso denominatore.

2.° Il numerator di ciascnno rilevasi dal sno denominatore, cambiando in questo il coefficiente dell'incognita che da tal valore vien rappresentata, nell'ultima lettera d , e cambiando ancora tutti i $+$ in $-$, ed i $-$ in $+$. Per esempio, se nel denominatore del valor di x trovato ultimamente, si cambino a in d , d' in d'' , a'' in d''' , e nel medesimo tempo vi si cambino i segni, si avrà il numerator.

Sarà dunque facile di calcolar ciascuna incognita, se si potrà avere una regola per determinare il comun denominatore dei lor valori. Per trovar questa

regola rilevasi, 1.º che allor quando si ha un' equazione ad un' incognita, come $ax + b = 0$, il denominatore è a . 2.º Allor quando si hanno due equazioni a due incognite, il denominatore è $ab' + a'b$. 3.º Allor quando si hanno tre equazioni a tre incognite, il denominatore è $+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c$, che si può mettere sotto di questa forma $(ab' - a'b) c'' + (a''b - ab'') c' + (a'b'' - a''b') c$.

Or si rileva che $ab' - a'b$ denominatore nel caso di due incognite, si forma da a , denominatore nel caso di una sola incognita, moltiplicando a per b' , poi cambiando in ab' , l'accento ' in o, e o in ' ; (per la lettera che ha o per accento, intendosi quella che non è accentata); e finalmente cambiando + in -.

Parimente il denominatore nel caso di tre incognite, cioè $(ab' - a'b) c'' + (a''b - ab'') c' + (a'b'' - a''b') c$, si forma da $ab' - a'b$, denominatore nel caso di due incognite, 1.º moltiplicando questo per c'' . 2.º Cambiando '' in ', ed ' in '', e cambiando anche i segni. 3.º Cambiando in quest' ultimo risultato ' in o, e o in ', ed anche i segni.

Vedesi dunque che per avere il denominatore nel caso di quattro incognite, si moltiplicherà quello che conviene al caso di tre incognite, per d''' , cambiando in seguito ''' in '', e '' in ''', e cambiando finalmente i segni. In questo secondo risultato si cambieranno i segni, e '' in ', ed ' in ''; in questo terzo risultato, si cambieranno i segni, ed ' in o, e o in '.

Or la regola è generale, e vedesi chiaramente ciò che bisogna fare nel caso di un maggior numero d' incognite.

Benchè siavi obbligo di calcolare i denominatori che convengono nel caso delle equazioni ad un minor numero d'incognite, pur non bisogna affatto temere che questa regola tragga seco più calcolo di quel ch'è necessario; dappoichè tutto ciò che si calcola con questa regola, entra necessariamente a comporre la grandezza che si cerca.

Applicazione delle precedenti regole al risolvimento di alcuni problemi che contengono più d'un' incognita.

86. Problema primo : *Un uomo ha due specie di monete : sette monete della specie di maggior valore, con dodici monete della seconda, fanno 283 lire ; e dodici monete della prima specie ; con sette della seconda , fanno 358 lire. Si dimanda quanto vale ciascuna moneta delle due rispettive specie ?*

Se si sapesse quanto vale una moneta di ciascuna specie, moltiplicando il valore di una moneta della prima specie, per 7, e quello d'una moneta della seconda specie per 12, e sommando i due prodotti, si troverebbero 288 lire; parimente moltiplicando il valore d'una moneta della prima specie per 12, e quello d'una moneta della seconda specie per 7, e sommando i due prodotti, si troverebbero 368 lire; ciò posto, se si rappresenti con x il numero delle lire, o il valore d'una moneta della prima specie, e con y il numero delle lire, o il valore d'una moneta della seconda specie, si potrà così ragionare:

Poichè ciascuna moneta della prima specie vale x , perciò sette monete di detta specie valeranno $7x$; e

per la stessa ragione. dodici monete della seconda specie valeranno $12y$; per cui dev' essere $7x + 12y = 288$.

Un simile ragionamento eseguito in riguardo alla seconda condizione, farà vedere che dev' essere $12x + 7y = 358$. Dunque non deve farsi altro, che trovare i valori di x , ed y . A tal uopo prendasi in ciascuna equazione il valor di x . Il primo, dopo di aver trasposto e diviso, ne dà $x = \frac{288 - 12y}{7}$; e l'

secondo ne offre $x = \frac{358 - 7y}{12}$; nguagliansi questi due

valori di x , e si ha l'equazione $\frac{288 - 12y}{7} = \frac{358 - 7y}{12}$

Per rilevare da quest'ultima il valor di y , tolgansi i denominatori (64) e si ha $3456 - 144y = 2506 - 49y$, o pur trasponendo e riducendo, $950 = 95y$, e finalmente dividendo, $y = \frac{950}{95} = 10$. Per aversi x ,

riprendasi il primo sno valore, cioè $x = \frac{288 - 12y}{7}$,

e per y sostituendo il suo valor 10, si ha

$x = \frac{288 - 12 \times 10}{7} = \frac{288 - 120}{7} = \frac{168}{7} = 24$; dunque

ogni moneta del maggior valore era di 24 lire, e ciascuna del valor minore, era di lire 10. In fatti 7 monete di 24 lire fanno 168 lire, che unite con 12 monete di 10 lire, o sia con 120 lire, fanno 288 lire. Di più 12 monete di 24 lire, che fanno lire 288, unite a sette monete di 10 lire, che fanno lire 70, offrono lire 358.

Problema secondo: *Si son mescolate insieme una certa quantità di oro, ed un'altra di argento. Tutta la mescolanza costituisce un volume di 12 pollici cubici, e pesa 100 once: un pollice cubico d'oro pesa once $12\frac{2}{3}$; ed un altro di argento pesa once $6\frac{8}{9}$. Dimandasi quanto è l'oro, e quanto l'argento che sono stati allegati?*

Se si conoscesse il numero dei pollici cubici di ciascun di questi metalli, sommando questi due numeri, si avrebbe 12. Di più prendendo once $12\frac{2}{3}$ tante volte, quanto è il numero dei pollici cubici dell'oro, si avrà di questo metallo il peso che entra nella mescolanza, e similmente moltiplicando once $6\frac{8}{9}$, pel numero dei pollici cubici dell'argento, si avrà di questo metallo anche il peso che entra nella mescolanza; per cui riunendo questi due prodotti, essi dovranno fare once 100.

Ragionando dunque similmente, e rappresentando con x il numero dei pollici cubici dell'oro, e con y quello dei pollici cubici dell'argento; dev'essere $x + y = 12$. Da altra parte ciascun pollice cubico d'oro pesa once $12\frac{2}{3}$, o sia $\frac{38}{3}$ di oncia, sicchè un numero x di pollici cubici di oro peserà $\frac{38}{3} \times x$, o sia $\frac{38x}{3}$. Per simil ragione, ciascun pollice cubico di argento pesa once $6\frac{8}{9}$, o sia $\frac{62}{36}$ di oncia, dun-

que un numero y di pollici cubici di argento peserà $\frac{62}{9} \times y$, o sia $\frac{62y}{9}$; ma essi debbon pesare once

100, dunque dev' essere $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$.

Per determinare i valori di x , ed y , tolgansi i denominatori da quest'ultima equazione, e si ha $342x + 186y = 2700$. E poichè dalla prima equazione rilevasi $x = 12 - y$, e dall'ultima $x = \frac{2700 - 186y}{342}$;

perciò adeguando questi due valor di x , si ha $12 - y = \frac{2700 - 186y}{342}$.

Per aversi y , tolgasi il denominatore, e ne risulta $4104 - 342y = 2700 - 186y$; trasponendo e riducendo, $1404 = 156y$, e finalmente dividendo, $y = \frac{1404}{156} = 9$; e come si ha di già $x = 12 - y$, così $x =$

$12 - 9 = 3$, cioè, che sonosi mescolati 3 pollici cubici di oro, con 9 di argento. In fatti, il tutto fa 12 pollici cubici. D'altra parte 3 pollici cubici, dei quali ciascuno pesa once $12 \frac{2}{3}$, fanno once 38, e 9

pollici cubici, ognun dei quali pesa once $6 \frac{8}{9}$, fanno once 62, che unite alle 38, fanno once 100.

Se le due materie che sonosi mescolate, abbiano gravità specifiche (*) diverse da quelle delle materie

(*) Dicesi *gravità specifica* di un corpo, il di lui peso sotto di un dato volume. Quando dicesi: un tal corpo pesa 12 libbre;

che sonosi proposte nell'esposto problema, ed anche il volume e 'l peso totale della mescolanza sien diversi da quelli che là si son supposti; non perciò sarà diverso il metodo per determinar le quantità di ciascuna specie di materia. A tale oggetto per restringere in una sola soluzione tutte quelle dei problemi di questa specie, suppongasi che il numero totale dei pollici cubici della mescolanza delle due specie di materia, sia generalmente espresso da..... a .

Che il peso totale della stessa mescolanza lo sia da b .

Che quello di un pollice cubico della prima materia lo sia da..... c .

E che l'altro di un pollice cubico della seconda, lo sia da..... d .

Badando, che i numeri b , c , d ne dinotino once.

In tal caso se rappresentinsi rispettivamente con x ed y i numeri dei pollici cubici della prima e della seconda materia; si avrà per prima equazione $x+y=a$:

Di più ogni pollice cubico della prima materia pesa once c , dunque, dato che ella sia pollici cubici x , la quantità della prima materia peserà $c \times x$ o sia cx . Per la stessa ragione la quantità della seconda materia peserà dy ; talmente che tutta la mescolanza peserà $cx+dy$, e come essa si è supposto pesar b , così dev' essere $cx+dy=b$.

non si determina altro che il di lui peso, e non già la specie della di lui materia; ma quando dicesi, per esempio, 12 pollici cubici di acqua comune pesano once 7 e dramme 6, allora si determina il peso di questa specie di acqua, e si è nello stato di determinare quanto pesi qualunque altro dato volume della stessa.

Ciò posto, la prima equazione dà $x = a - y$; e dalla seconda si ha $x = \frac{b - dy}{c}$; dunque pareggiando questi due valori di x , risulta $a - y = \frac{b - dy}{c}$; togliendo il denominatore, viene $ac - cy = b - dy$; e finalmente, trasponendo e dividendo, rilevasi $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Per avere il valor di x , bisogna nell'equazione $x = a - y$ sostituirvi il valor di y ora ottenuto, e si ha $x = a + \frac{b - ac}{c - d}$; ove vedonsi cambiati i segni del nu-

meratore di $\frac{ac - b}{c - d}$, perchè devesi appunto y sottrarre da a (11). Tal valore di x può esser semplicizzato, riducendo il tutto in fratto (45), lo che ne dà $x = \frac{ac - ad + b - ac}{c - d}$, o pur riducendo, $x = \frac{b - ad}{c - d}$.

I valori $x = \frac{b - ad}{c - d}$, ed $y = \frac{ac - b}{c - d}$ che or sonosi ritrovati, posson somministrare una regola suscettibile di una molto semplice enunciazione, pel risolvimento generale di tutt' i problemi di questa specie.

Per trovar questa regola, bisogna fare attenzione 1.^o che b dinota il peso di tutta la mescolanza; 2.^o che a indica tutto il suo volume, d il peso di un pollice cubico della seconda materia, ed ad dinota ciò che peserebbe il volume della mescolanza, se essa fosse composta soltanto della seconda materia. In fatti, se, per esempio, tutto il volume fosse di argento, si troverebbe il suo peso totale, moltiplicando il peso d di un pol-

lice cubico di argento, pel numero a di tutt' i pollici cubici. Finalmente il denominatore $c - d$ è la differenza delle gravità specifiche di ciascuna specie di materia.

Se similmente si analizza il valor di y , si vedrà che ay è ciò che peserebbe il volume della mescolanza, se essa fosse composta soltanto della prima materia. Da ciò potrà conchiudersi questa regola.

Si calcoli quanto peserebbe tutta la mescolanza, se essa fosse composta soltanto della seconda materia; un tal peso si tolga da quello attuale dell' intera mescolanza, e 'l residuo si divida per la differenza delle gravità specifiche delle due materie: il quoziente sarà il numero delle parti della prima materia che entra nella mescolanza.

Al contrario, per avere il numero delle parti della seconda materia, si calcoli quanto peserebbe tutta la mescolanza, se essa fosse tutta intera della prima materia, e da tal peso si tolga quello attuale dell' intera mescolanza, e 'l residuo dividasi per la stessa grandezza di què sopra.

Questa regola è precisamente quella, che in Aritmetica chiamasi *la regola di Allegazione*, e che ivi è stata rimessa a questa terza parte.

A questo stesso problema può ridursi un' infinità di altri, che a prima vista non sembrano, della stessa specie: per esempio, questo; comporre 522 lire con 42 monete, alcune di 24 lire, ed alcune altre di lire 6; perchè con poca attenzione, vedesi che questo problema è lo stesso di quest' altro; un misto di 42 pollici cubici di materia, pesa once 522: delle due materie che lo compongono, una pesa once 24 ogni pol-

lice cubico, e l'altra once 6. Seguendo la regola precedente, si troverà che vi bisognano 15 monete di 24 lire, e 27 di lire 6.

La stessa regola condurrà ancora a risolvere quest'altro problema. *Un piede cubico di acqua marina pesa 74 libbre, e 70 un altro di acqua piovana; cercasi quanta della prima acqua e quant'altra della seconda converrà mescolare insieme, per ottenerne una terza che pesi 73 libbre ogni piede cubico?*

Da ciò rilevasi, quanto possa essere utile di accostumarsi ben presto a rappresentare, in una maniera generale, le grandezze note, che han luogo nei problemi; e ad interpretare o traslatàre i risultati algebrici delle soluzioni dei problemi.

Problema terzo: *Sonovi tre verghe metalliche ciascuna composta di oro, argento, e rame. La lega della prima è tale, che in once 16 ve ne sono 7 di oro, 8 di argento, ed 1 di rame. Nella seconda, in once 16 ve ne sono 5 di oro, 7 di argento, e 4 di rame. Nella terza, in once 16 ve ne sono 2 di oro, 9 di argento, e 5 di rame. Si vuol prendere da ognuna di queste tre verghe una porzione, in modo che se ne componga una quarta tale, che in once 16 vi contenga once $4\frac{15}{16}$ di oro, once $7\frac{10}{16}$ di argento, ed once $3\frac{7}{16}$ di rame.*

Contrassegninsi con x il numero d'once che bisogna prender dalla prima verga; con y , quello che bisogna prender dalla seconda; e finalmente con z , l'altro che bisogna prender dalla terza.

Poichè 16 once della prima contengono 7 once d'oro,

trovando il quarto proporzionale in ordine a 16, 7, ed x , si determinerà quant'oro si contiene in once x della prima; ed un tal quarto sarà $\frac{7x}{16}$; con un simile raziocinio si troverà, che in once y della seconda evvi una quantità di oro espressa da $\frac{5y}{16}$; e che in once z della terza siavene un'altra dinotata da $\frac{2z}{16}$.

Queste tre grandezze insiem sommate fanno $\frac{7x+5y+2z}{16}$;

ma si vuole che esse facciano $4 \frac{15}{16}$, o sia $\frac{79}{16}$; dunque

$$\frac{7x+5y+2z}{16} = \frac{79}{16}.$$

Per soddisfare alla seconda condizione, si rileverà similmente, che prendendo once x sulla prima verga, prendonsi necessariamente once d'argento dinotate da $\frac{8x}{16}$; sulla seconda, once $\frac{7y}{16}$; e finalmente sulla terza, once $\frac{9z}{16}$; queste tre grandezze insiem sommate fanno

$$\frac{8x+7y+9z}{16}, \text{ ma esse debbon costituire } 7 \frac{10}{16}, \text{ o sia}$$

$$\frac{122}{16}, \text{ dunque esser deve } \frac{8x+7y+9z}{16} = \frac{122}{16}.$$

Procedendo della stessa maniera, per soddisfare alla terza condizione, si avrà l'equazione $\frac{x+4y+5z}{16} =$

$$\frac{55}{16}.$$

E poichè il numero 16 è comun divisore dei due membri di ciascuna di queste tre equazioni, perciò si può sopprimere, ed allor si hanno le tre seguenti equazioni $7x + 5y + 2z = 79$, $8x + 7y + 9z = 122$, $x + 4y + 5z = 55$. E rilevando da ciascuna il va-

lor di x , si ha $x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$, $x = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$,

$x = 55 - 4y - 5z$; e pareggiando il primo valor di x al secondo ed al terzo (79), si avrà $\frac{79 - 5y - 2z}{7}$

$$= \frac{122 - 7y - 9z}{8}, \text{ e } \frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z,$$

equazioni che contengon due sole incognite, e che bisogna perciò trattarle nel modo esposto (74).

A tal uopo si cominci dal togliere i divisori, e si ha $632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z$, e $79 - 5y - 2z = 385 - 28y - 35z$, o pur, passando tutte le y da una parte, e riducendo, $9y = 222 - 47z$, e $23y = 306 - 33z$; la prima di queste due equazioni offre $y = \frac{222 - 47z}{9}$; e la seconda $y = \frac{306 - 33z}{23}$; pareggiando

questi due valor di y , si ha $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$;

togliendo i denominatori, risulta $5106 - 1081z = 2754 - 297z$; trasponendo, si ha $5106 - 2754 = 1081z - 297z$; e finalmente, riducendo e dividendo,

$$\text{si ottiene } z = \frac{2352}{784} = 3.$$

Per avere y , questo valor di z or ritrovato, sostituisca in un dei due valori della y rinvenuti poco

più sopra; per esempio, sostituiscasi in $y = \frac{222 - 47x}{9}$,

e si ha $y = \frac{222 - 141}{9} = \frac{81}{9} = 9$.

Finalmente, per avere x , in un dei suoi tre valori più sopra rinvenuti, sostituiscansi i valori or determinati di y , e z ; per esempio, nell'ultimo $x = 55 - 4y - 5z$, e sarà $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; vale a dire, perchè si son trovati $x = 4$, $y = 9$, e $z = 3$; perciò bisogna prendere once 4 della prima verga, 9 della seconda, e 3 della terza; affinchè la nuova contenga di oro, once 4 $\frac{15}{16}$; di argento, once 7 $\frac{10}{16}$; e di rame once 3 $\frac{7}{16}$.

In fatti, poichè la prima verga in once 16, ne contiene 7 di oro, 8 di argento, ed 1 di rame; è chiaro, se di questa se ne prendano sole once 4, che si avrà di oro $\frac{28}{16}$ di oncia, di argento $\frac{32}{16}$, e di rame $\frac{4}{16}$. Per una simile ragione, prendendo once 9 della seconda verga, si avrà di oro $\frac{45}{16}$, di argento $\frac{63}{16}$, e di rame $\frac{36}{16}$. E finalmente prendendo once 3 della terza, si avrà di oro $\frac{6}{16}$, di argento $\frac{27}{16}$, e di rame $\frac{15}{16}$.

Sommando le tre quantità di ciascuna specie di materia, che si hanno dalle tre verghe, si otterrà $\frac{79}{16}$.

$\frac{122}{16}$, e $\frac{55}{16}$, o sia once $4\frac{15}{16}$, once $7\frac{10}{16}$, ed once 3

$\frac{7}{16}$, per le rispettive quantità dell'oro, dell'argento, e del rame, che effettivamente entrano a comporre la quarta verga.

Dei casi, ne' quali i problemi che si propongono, restano indeterminati, benchè abbiansi tante equazioni, quante son le incognite; e dei casi, ne' quali essi problemi sono impossibili.

87. Accade qualche volta, che sebbene abbiansi tante equazioni, quante son le incognite, pur nondimeno il problema da cui sonosi rilevate tali equazioni resta indeterminato, cioè, che, in tal caso egli ammette un indefinito numero di soluzioni.

Ciò avverasi allor quando alcune condizioni, benchè differenti all'aspetto, pur tuttavia nell'essenza son le stesse. In tal caso le equazioni che esprimono queste condizioni sono o le une multiple delle altre, o pur, generalmente, alcune di esse son costituite da una o più delle altre, tra lor sommate o sottratte, moltiplicate o divise per certi numeri. Per esempio, un problema che condur-

rebbe a queste tre equazioni $5x + 3y + 2z = 17$, $8x + 2y + 4z = 20$, $18x + 8y + 8z = 54$, sarebbe suscettibile di un indefinito numero di soluzioni, benchè sembri, in seguito di quel che superiormente si è veduto, che ciascuna delle x , y , e z non possa avere che un sol valore. Di queste tre equazioni, l'ultima è composta dalla seconda sommata col doppio della prima. Ora è evidente, che una volta che sien date le due prime, la terza debba naturalmente seguirne; e che quindi essa non esprime affatto alcuna novella condizione: per cui in tal caso è come se fosser date le sole prime due equazioni: or si vedrà tra poco che quando si hanno due equazioni con tre incognite, ciascuna di queste è suscettibile di un indefinito numero di valori.

88. Il calcolo fa sempre conoscere il caso di cui quì si tratta: ecco in che modo. Non deve farsi altro, che procedere alla ricerca delle incognite, secondo le regole stabilite di sopra: in tal caso se alcuna dell'equazioni è nelle altre compresa, nel corso del calcolo giungerassi ad una equazione *identica*, cioè ad una equazione i di cui membri non solo saranno eguali, ma composti ancora da termini simili ed eguali: ed è da avvertirsi, che quante equazioni identiche si troveranno, altret-

tante saranvi equazioni inutili, fra quelle che saranno state proposte.

Per esempio, se rilevisi da ciascuna delle due equazioni

$$6x + 8y = 12, \text{ ed } x + \frac{4}{3}y = 2 \text{ il valor di } x, \text{ si avrà } x =$$

$$\frac{12 - 8y}{6}, \text{ ed } x = 2 - \frac{4}{3}y: \text{ pareggiando questi due}$$

valori, si avrà $\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, o togliendo i denominatori, $36 - 24y = 36 - 24y$, equazione identica e che non può far conoscere il valor di y , poichè eseguita la trasposizione e la riduzione, perviensi a questa equazione $0 = 0$.

Del pari, nelle tre precedenti equazioni (87) rilevasi $x = \frac{17 - 3y - 2z}{5}$, $x = \frac{20 - 2y - 4z}{8}$, ed $x =$

$$\frac{54 - 8y - 8z}{18}, \text{ pareggiando il primo di questi due}$$

$$\text{valori al secondo ed al terzo, si avrà } \frac{17 - 3y - 2z}{5}$$

$$= \frac{20 - 2y - 4z}{8}, \text{ e } \frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{54 - 8y - 8z}{18}, \text{ to-}$$

gliendo i denominatori, trasponendo, riducendo, e dividendo, si avrà per la prima $y = \frac{36 + 4z}{14}$; e per

la seconda, $y = \frac{36 + 4z}{14}$; valori, che pareggiati,

$$\text{esibiscono l'equazione identica } \frac{36 + 4z}{14} = \frac{36 + 4z}{14}:$$

in questo caso adunque si han solo due equazioni realmente distinte.

Ma se abbiansi le tre seguenti equazioni:

$$5x + 3y + 2z = 24$$

$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$

$$15x + 9y + 6z = 72$$

La prima darà $x = \frac{24-3y-2z}{5}$; la seconda, dopo di aver tolto i deneminatori, trasposto, ridotto, ec. esibirà $x = \frac{120-15y-10z}{25}$; e la terza $x = \frac{72-9y-6z}{15}$. Pareggiando il primo di questi valori al

secondo ed al terzo, si avrà $\frac{24-3y-2z}{5} = \frac{120-15y-10z}{25}$, e $\frac{24-3y-2z}{5} = \frac{72-9y-6z}{15}$;

e togliendo i denominatori, $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, e $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$, equazioni identiche, e dalle quali non può ritrarsene nè y , nè z , perchè riduconsi ciascuna a $0 = 0$. Dunque, a parlar propriamente, qui non si ha che una sola equazione.

I problemi che conducono a simili risultati, sono indeterminati, ma non però impossibili. Tra poco vedrassi, come debban trattarsi.

89. Nei suddetti casi, i numeratori ed i denominatori dei valori di ciascuna delle incognite x , y , e z , ec. che sonosi esibiti (85), divengon o, lo che accader deve, come può conchiudersi facilmente da ciò che si è detto. Dunque per mezzo di queste formole generali si posson riconoscere i casi, nei quali alcune delle equazioni saran comprese nelle altre.

90. Quando un problema, che conduce ad equazioni di primo grado, è impossibile, ciò si rileva da qualche assurdo al qual ne guida il calcolo; per esempio, se pel suo mezzo, si giungesse a $4 = 3$.

Se abbianci, per esempio, le due equazioni

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 30, \text{ e} \\ 20x + 12y &= 135 \end{aligned}$$

La prima darà $x = \frac{30-3y}{5}$, e la seconda $x =$

$\frac{135-12y}{20}$; pareggiando questi due valori, si ha

$\frac{30-3y}{5} = \frac{135-12y}{20}$; togliendo i denominatori, si ha

$600 - 60y = 675 - 60y$, che conduce a $600 = 675$, lo che è assurdo; dunque il problema che porterà alle due equazioni $5x + 3y = 30$, e $20x + 12y = 135$, è impossibile ed assurdo.

91. Le soluzioni negative ancora indicano una

specie d'impossibilità nel problema ; questa però non è assoluta , ma relativa al senso nel quale sono state prese le quantità ; di maniera che evvi un senso nel quale queste soluzioni son naturali ed ammissibili ; veggasi ciò che si è detto (70).

Dei problemi indeterminati.

92. Qualunque problema al quale può soddisfarsi in più modi , senza poter determinare fra tutti questi , qual sia quello che a tal problema dia luogo, dicesi *indeterminato*. Questi problemi serban sempre meno condizioni , che incognite ; e generalmente considerati , essi son suscettibili d' infinite soluzioni ; ma ancor sovente accade , che il numero di queste vien limitato da alcune condizioni , che non potendosi porre in equazione , non permettono di determinare in una maniera diretta , il numero delle soluzioni che può avere il problema.

Se propongasi questo problema: *Trovar due numeri la di cui somma sia 24* ; chiamando x ed y rispettivamente l' uno e l' altro di essi , si avrà $x + y = 24$; dalla quale equazione rilevasi l'altra , $x = 24 - y$. Or questa è suscettibile di una infinità di soluzioni , se per x ed y intendansi indifferentemente dei numeri interi o fratti , positivi o negativi : per

soddisfarvi, basta prender per y qual numero si voglia, e di conchiuderne il valor di x per mezzo dell'equazione $x = 24 - y$ con sostituirci per y il numero che arbitrariamente si è preso; così se suppongasi successivamente $y = 1, y = 1\frac{1}{2}, y = 2, y = 2\frac{2}{3}$, ec., si avrà rispettivamente $x = 23, x = 22\frac{1}{2}, x = 22,$

$x = 21\frac{1}{3}$, ec. Ma se non vogliansi che numeri interi e positivi, allora il numero delle soluzioni è limitato; poichè acciò sia positiva x , bisogna che y non sia maggior di 26. E perchè si vogliono numeri interi, perciò è evidente che l'equazione non può avere altro che 25 soluzioni, comprendendovi il 0: di modo che supponendo successivamente $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$, ec., si avrà rispettivamente $x = 24, x = 23, x = 22, x = 21$, ec.

93. Ma quando viene imposta la condizione, che vogliansi numeri interi e positivi, non vedesi sempre così facilmente, come nell'esempio precedente, il modo di soddisfarvi: i seguenti problemi son bene adattati a farlo capire.

Problema primo. *Dimandasi in quante maniere si*

★

posson pagare 542 lire, consegnando monete ciascuna di lire 17, e ricevendo in cambio monete ciascuna di 11 lire?

Rappresentinsi con x il numero delle monete di lire 17, e con y quello delle monete di lire 11, consegnando monete x di lire 17, si pagherà x volte lire 17, o sia $17x$: ricevendo y monete di lire 11, si riceverà $11y$; onde si sarà pagato $17x - 11y$; e poichè si vuol pagare 542 lire, perciò dev' essere $17x - 11y = 542$. Rilevisi il valor di y , cioè della incognita che ha il minor coefficiente, e si ha $y =$

$$\frac{17x - 542}{11}$$

Come si ha soltanto quest'equazione, così vedesi che mettendo per x arbitrariamente qual numero si vorrà, si avrà per y un valore che soddisferà sicuramente all'equazione; ma poichè il problema esige che x ed y sien numeri interi, perciò ecco come bisogna regolarsi per pervenirvi direttamente.

Il valor di $y = \frac{17x - 542}{11}$, facendo la divisione

$$\text{finchè si può, riducesi ad } y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11};$$

dunque bisogna che $\frac{6x - 3}{11}$ sia un numero intero, il

qual chiamisi u ; sarà $\frac{6x - 3}{11} = u$, per cui $6x - 3$

$$= 11u, \text{ ed } x = \frac{11u + 3}{6} = \frac{6u + 5u + 3}{6} = \frac{6u}{6} +$$

$$\frac{5u + 3}{6} = u + \frac{5u + 3}{6}; \text{ dunque bisogna che } \frac{5u + 3}{6} \text{ sia}$$

un intero, il qual chiamisi t ; si avrà $\frac{5u+3}{6} = t$, e

perciò $5u+3 = 6t$, ed $u = \frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$;

dunque bisogna che $\frac{t-3}{5}$ sia un numero intero, il

qual sia s , sicchè $\frac{t-3}{5} = s$, onde $t-3 = 5s$, e

$t = 5s+3$: l'operazione qui è terminata, perchè è chiaro che prendendo per s qual numero intero si voglia, che sempre si avrà per t un numero intero qual lo esige il problema, poichè egli non tiene più denominatore.

Si ritorui ora ai valori di x ed y : poichè si è trovato $u = \frac{6t-3}{5}$; ponendo per t il suo valore

$5s+3$, si avrà $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s+3$: e

poichè si è trovato $x = \frac{11u+3}{6}$, mettendo per u

il suo valore, si avrà $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s+6$:

finalmente, poichè si è trovato $y = \frac{17x-542}{11}$, so-

stituendo per x il suo valore, si avrà $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s-40$; così i valori corri-

spondenti di x ed y sono $x = 11s+6$, ed $y = 17s-40$. Pel primo, si può prendere per s qual numero intero si vuole, ma 'l secondo non permette di pren-

dere s minor di 3; in fatti dovendo esso esser positivo, bisogna che $17s$ sia maggior di 40, cioè che s sia maggior di $\frac{40}{17}$, e pure maggior di 2.

Dunque a questo problema puossi soddisfare in infiniti diversi modi, che avransi tutti sostituendo nei valori di x ed y , in vece di s , tutti gli immaginabili numeri interi positivi da 3 sino all'infinito: così ponendo successivamente $s = 3, s = 4, s = 5, s = 6, s = 7$, ec., i corrispondenti valori di x ed y avransi come segue:

$$\begin{array}{rcl} x = 39 & \dots & y = 11 \\ & = & 50 \\ & = & 61 \\ & = & 72 \\ & = & 83, \text{ ec.} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & & \\ & = & 28 \\ & = & 45 \\ & = & 62 \\ & = & 79 \end{array}$$

Di cui ciascuno è tale, che consegnando il numero di monete di 17 lire dinotato da x , e ricevendo il numero corrispondente di monete di 11 lire dinotato da y , si pagheranno 542 lire.

Problema secondo. Dividere 741 lire in 41 monete di tre specie; cioè di 24 lire, di 19 lire, e di 10 lire.

Sieno x, y , e z i numeri delle monete di ciascuna delle tre specie; poichè vogliansi in tutto 41 monete, perciò si avrà, 1.º $x + y + z = 41$.

2.º Perchè ciascuna moneta della prima specie vale 24 lire, perciò il numero x di monete valerà x volte 24 lire, cioè $24x$; per simile ragione y monete della seconda specie valeranno $19y$, e z monete della terza specie valeranno $10z$; così i valori riuniti dei tre au-

meri delle differenti monete, costituiranno $24x + 19y + 10z$; e come esse debbon fare lire 741, così si avrà $24x + 19y + 10z = 741$.

In ciascuna di queste equazioni prendasi il valor di una stessa incognita, qualunque siasi; di x , per esempio, e si ha $x = 41 - y - z$, ed $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; uguagliansi questi due valori, e si

ha $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, o togliendo il denominatore, $984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z$; trasponendo e riducendo, si ha $243 = 5y + 14z$.

Prendasi ora il valor di y che ha il minor coefficiente, e si ha $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$; ora y , e z debbono esser numeri interi,

dunque deve essere anche un intero $\frac{3 - 4z}{5}$; onde

un tale intero sia t ; si avrà $\frac{3 - 4z}{5} = t$, cioè $3 -$

$4z = 5t$; dunque $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; sicchè

bisogna che $\frac{3 - t}{4}$ sia un intero: sia u un tal nome-

ro; si avrà $\frac{3 - t}{4} = u$, o sia $3 - t = 4u$, e per conseguenza $t = 3 - 4u$.

Facciasi ritorno ora ai valori di y , z ed x .

Poichè si è trovato $z = \frac{3 - 5t}{4}$, ponendo per t il suo

valore, si avrà $x = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u$

- 3; e poichè si è trovato $y = \frac{243 - 14z}{5}$; mettendo

per z il suo valore, si avrà $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} =$

$\frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u.$

Finalmente, perchè si è trovato $x = 41 - y - z$, perciò si avrà $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. In modo che i corrispondenti valori di x, y , e z sono $x = 9u - 13, y = 57 - 14u$, e $z = 5u - 3$, nei quali in vece di u si può mettere qual numero intero si voglia, purchè però per x, y , e z abbiansi numeri positivi: or questa condizione porta seco queste tre altre. 1.° Che $9u$ sia maggior di 13, cioè che u sia maggior di $\frac{13}{9}$, o di $1\frac{4}{9}$. 2.° Che 57 sia mag-

giore di $14u$, cioè che u sia minore di $\frac{57}{14}$, o di

$4\frac{1}{14}$. 3.° Finalmente che $5u$ sia maggior di 3, cioè u

maggior di $\frac{3}{5}$, ciò che deve assolutamente avverarsi,

avuto riguardo alla prima condizione: dunque così il numero delle soluzioni è limitatissimo, e si riduce a tre che trovansi dando ad u per valori i numeri 2, 3, e 4, che sono i soli che ammette lo stato del problema. Dunque 741 lire possono dividersi in 41 monete delle tre proposte specie, prendendo di ciascuna specie il numero di monete notato qui

sopra; qual numero di monete ritrovasi sostituendo successivamente in $x, y, e z$, per u i numeri 2, 3, e 4.

x	y	z
5.....	29.....	7
14.....	15.....	12
23.....	1.....	17

Nel corso delle divisioni che si son fatte per ridurre il valor dell' indeterminata ad un numero intero, non vi è nessun motivo che obblighi a prendere il quoto piuttosto al di sotto, che al di sopra del suo vero valore. Anzi qualche volta è expediente di prenderlo in quest' ultimo modo

Per esempio, se abbiassi l'equazione $19y = 52x + 159$, in vece di conchiuderne $y = 2x + 7 + \frac{14x + 5}{19}$

prendendo $2x$ per valor del quoto di $52x$ diviso per 19 in numeri interi, si conchiuderà $y = 3x + 7 + \frac{6 - 5x}{19}$, prendendo piuttosto $3x$ per quoto, perchè un

tal quoto è più approssimante, e che l'eccesso $5x$ di cui tiensi conto dandogli il segno $-$, ha un coefficiente minore, ciò che non può fare a meno di abbreviare il calcolo. Si fa in seguito $\frac{6 - 5x}{19} = u$; da

cui si rileva $x = \frac{6 - 19u}{5}$, e per simil ragione, $x =$

$1 - 4u = \frac{1 + u}{5}$. Facendo $\frac{1 + u}{5} = t$, si ha simil-

mente $u = 5t - 1$; la che compie la soluzione più prontamente di quel che se ciascun quoto si fosse

preso al di sotto del suo vero valore. Se si rimonti, come qui sopra, ai valori di x ed y , si troveranno $x = 5 - 19t$, ed $y = 21 - 52t$, che assegnando per valori a t , tutti i numeri negativi dopo il zero, offriranno tutte le soluzioni positive dell'equazione.

Delle Equazioni del secondo grado ad una sola incognita.

94. Chiamansi *Equazioni del secondo grado*, quelle nelle quali la più alta potenza dell'incognita, è questa stessa moltiplicata per se medesima, o elevata a quadrato. Così l'equazione $5x^2 = 125$, è di secondo grado, perchè nel termine $5x^2$ l'incognita x è moltiplicata per se stessa.

95. Quando l'equazione contiene soltanto il quadrato dell'incognita, essa sempre risolvesi facilmente: basta di liberare tal quadrato dell'incognita, da tutto ciò che può moltiplicarlo o dividerlo, o dalle grandezze che posson trovarvisi unite coi segni $+$ o $-$, lo che si fa colle regole date (56, 60, e 64); dopo qual cosa devesi solo estrar la radice quadrata da ciascun membro.

Per esempio dall'equazione $5x^2 = 125$, dividendola per 5, rilevasi $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, ed estraendo la ra-

dice quadrata da ciascun membro, $x = 5$: perchè è chiaro che se due grandezze sono uguali, uguali saranno anche le di loro radici quadrate, ed è ancor manifesto che di x^2 è x la radice quadrata.

Parimente, se si ha l'equazione $\frac{5}{3} x^2 = \frac{4}{5} x^2 + 7$; tolgansi le frazioni, e si ha $25x^2 = 12x^2 + 105$; trasponendo e riducendo, $13x^2 = 105$; e dividendo, $x^2 = \frac{105}{13}$; per cui $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Questo segno $\sqrt{}$ indica che devesi estrarre la radice quadrata. Quando devesi estrarre la radice quadrata da un fratto, come nel caso presente, si fa discendere la gamba del segno $\sqrt{}$ (che chiamasi *segno radicale*), al disotto della linea che separa i due termini del fratto. Ma se devesi rappresentare la radice quadrata di un sol di questi due termini, il radicale sarà interamente o al di sopra, o al di sotto di tal linea; così se vogliasi dinotare che dal solo numeratore di $\frac{40}{5}$ vogliasi estrarre la radice quadrata, si scriverà $\frac{\sqrt{40}}{5}$.

Se la grandezza da cui devesi estrarre la radice quadrata fosse composta, si assegnerà al radicale una barra che coprirà tutta una tal grandezza; per esempio, per dinotar la radice

quadrata di $3ab + b^2$, scriverassi $\sqrt{3ab + b^2}$. Altre volte la grandezza composta si rinchiude in due parentesi, che fansi precedere dal segno $\sqrt{}$, in questo modo $\sqrt{(3ab + b^2)}$.

96. Si è veduto (24) che quando il moltiplicando e l moltiplicatore avevano ambidue lo stesso segno, che il prodotto aveva sempre il segno $+$; ciò essendo, quando devesi estrarre la radice quadrata da una grandezza che ha il $+$, a tal radice devesi indifferentemente dare il $+$ o il $-$; così nella precedente equazione $x^2 = 25$, quando si è estrarre la radice quadrata, può dirsi egualmente che ella è tanto $+5$, quanto -5 , perchè ciascun di questi numeri moltiplicato per se stesso riproduce sempre 25, in modo che il risolvimento dell'equazione $x^2 = 25$, scrivesi così, $x = \pm 5$; che pronunciasi dicendo *x uguale a più o meno 5*, ed equivale a queste due equazioni $x = +5$, ed $x = -5$.

Parimente per la seconda equazione recata di sopra, scrivesi $x = \pm \sqrt{\frac{185}{15}}$ (*).

(*) Potrebbe qui dimandare perchè non si dà ancora il doppio segno $\pm$ al primo membro. La risposta è che si può; ma ciò non reca nessun cambiamento, e val lo stesso come se gli si desse solo il $+$. In fatti se scrivesi $\pm x = \pm 5$, ricavansi

97. Quando devesi estrar la radice quadrata da una grandezza preceduta dal segno $-$, si sottopone tutto al radicale, il qual si fa precedere dal doppio segno $+$; così se abbiassi $x^2 = -4$, si scriverà $x = \pm \sqrt{-4}$; e benchè possa estrarsi la radice quadrata da 4, ch'è 2, non bisognerà affatto scrivere $x = \pm 2$: quì interessa di fare attenzione al segno $-$ della grandezza che sta sotto del radicale.

98. Allorchè un'equazion conduce così ad estrar la radice quadrata da una grandezza negativa, può conchiudersi che il problema che ha portato a questa equazione è impossibile: in fatti una grandezza negativa non può aver radice quadrata, nè esatta, nè approssimante; perchè non evvi alcuna grandezza, sia positiva, sia negativa, che essendo moltiplicata per se stessa possa produrre una quantità negativa: è vero che -4 , per esempio, può esser

queste equazioni $+x = +5$, $+x = -5$, $-x = +5$, $-x = -5$. L'ultima, cambiandovi i segni, riducesi alla prima, e lo stesso è della terza relativamente alla seconda.

Bisogna ben guardarsi di credero che il valor di x nella prima equazione $x = 5$, sia lo stesso che nella seconda $x = -5$. perchè sebbene questi due valori esprimono la stessa lettera x , pure questa non è altro che un segno col qual si rappresenta la grandezza che si cerca; essa può dinotar diverse grandezze come appunto la parola *scudo* dinota differenti valori in differenti paesi.

considerato come derivante da $+ 2$ moltiplicato per $- 2$; ma queste due grandezze avendo un segno differente, non sono al certo uguali, e quindi il di lor prodotto non è un quadrato. In tal modo, allorchè proponesi di estrar la radice quadrata da una grandezza negativa, proponesi una cosa impossibile; dunque ogni problema che si ridurrà ad una simile operazione, sarà impossibile.

Da questo segno è appunto che si distingue l'impossibilità dei problemi del secondo grado.

Del resto, non per questo bisogna riguardar come inutile la considerazione delle radici quadrate delle grandezze negative: accade spesso che un problema, benchè possibile, si risolve per mezzo di simili grandezze, nelle quali finalmente scomparisce tutta l'impossibilità. Tali grandezze diconsi *immaginarie*. Così $\sqrt{-a}$ è una grandezza immaginaria; $a + \sqrt{-b}$ è anche una grandezza immaginaria.

99. Ciò che si è detto basta pel risolvimento dei problemi del secondo grado, nei quali siavi soltanto il quadrato della x . Ma oltre il quadrato dell'incognita, può esservi ancora la prima potenza dell'incognita moltiplicata o divisa per qualche grandezza nota (lo che accade più spesso), come in questa equazione

$x^2 - 4x = 12$. Allora l'artificio che deve impiegarsi per risolvere l'equazione, consiste in preparare il primo membro in modo che costituisca un quadrato: questa preparazione suppone, prima di tutto, tre cose; 1.° che siensi passati in un sol membro tutti i termini affetti dalla x , e nell'altro le grandezze note; lo che si esegue per ciò che si è detto (56): 2.° che il termine il qual contiene x^2 , sia positivo; in modo che, se egli abbia il segno $-$, si cambieranno tutti i segni dell'equazione, cosa che non turba affatto l'eguaglianza: 3.° Che il termine che contiene x^2 sia libero da ogni moltiplicatore o divisore; e se egli non fosse in questo stato, vi si ridurreà moltiplicando tutti gli altri termini dell'equazione per questo divisore, o dividendoli per quel moltiplicatore.

Per esempio se debbasi risolvere l'equazione $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$. 1.° si passeranno tutte le x nel primo membro scrivendo il termine x^2 per primo, e si avrà $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, o sia $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2.° si cambieranno i segni per rendere x^2 positiva, e si avrà $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3.° si moltiplicherà per 5, lo che darà $3x^2 - 30x = -20$; finalmente

si dividerà per 3, e si avrà $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Come tutte l'equazioni di secondo grado possensi sempre ricondurre a questo stato, così attualmente le osservazioni si faranno su di un'equazione preparata in tal modo.

100. Ciò posto per risolvere un'equazion di secondo grado, bisogna seguir questa regola:

Prendasi la metà della grandezza cognita che moltiplica x nel secondo termine: una tal metà si elevi a quadrato, qual quadrato si aggiunga a ciascun membro dell'equazione, lo che non turba affatto l'uguaglianza. Così il primo membro diverrà un quadrato perfetto. Estraggasi la radice quadrata da ciascun membro, e quella del secondo membro facciasi precedere dal doppio segno; l'equazion sarà ridotta al primo grado.

In quanto al modo di estrar la radice quadrata dal primo membro, si estrarrà la radice quadrata dal quadrato dell'incognita, e l'altra dal quadrato che si è aggiunto: si aggiungerà questa seconda alla prima, ma però col segno che avrà il secondo termine dell'equazione.

Per esempio, avendosi $x^2 + 6x = 16$, si prende la metà della quantità cognita 6, che moltiplica x nel

secondo termine : si eleva a quadrato tal metà , e il quadrato 9 aggiungesi a ciascun membro ; si ha $x^2 + 6x + 9 = 25$; non deve ora farsi altro che estrarre la radice quadrata , lo che si fa prendendo la radice quadrata di x^2 che è x , indi quella di 9 che è 3 ; e come il secondo termine $6x$ dell'equazione ha il segno $+$, conchiudesi così che $x + 3$ è la radice quadrata del primo membro ; in quanto a quella del secondo ; essa è ± 5 (96) ; onde $x + 3 = \pm 5$. Per avere x , deve farsi una semplice trasposizione , e si avrà $x = \pm 5 - 3$; vale a dire , che x ha due valori ; cioè $x = + 5 - 3 = 2$, ed $x = - 5 - 3 = - 8$. Qui appresso vedrassi cosa significa questo secondo valore.

Per capire la ragion di questa regola , bisogna ricordarsi ciò che si è rimarcato (25) , cioè che il quadrato di una grandezza composta da due termini , contien sempre il quadrato del primo termine , il doppio del primo termine moltiplicato pel secondo , e l quadrato del secondo.

Ciò posto , allor quando ad una grandezza come $x^2 + 6x$ trattasi di aggiungere ciò che occorre per costituirne un quadrato , bisogna considerar 1.º che tal grandezza di già contiene un quadrato x^2 che può considerarsi come il quadrato del primo termine x di un binomio . 2.º Che può sempre considerarsi l'altro termine $6x$, come il doppio di x moltip-

plicato per un'altra grandezza. 3.^o Che tale altra grandezza è necessariamente la metà del coefficiente 6 di x . Non manca dunque altro, che il quadrato di questa grandezza, cioè, il quadrato della metà del coefficiente di x nel secondo termine. Vedesi che questo ragionamento è generale, qualunque sia il valor di x .

In quanto alla regola che nello stesso tempo si è data per estrar la radice quadrata dal primo membro, essa è parimente una conseguenza della formazion del quadrato; poichè i due quadrati estremi che trovansi nel quadrato di un binomio, essendo i quadrati dei due termini della radice, è evidente che debbonsi soltanto estrarre separatamente le radici da questi due quadrati, per aver questi due termini. Ma però devesi al secondo termine della radice, dar lo stesso segno che ha il secondo termine dell'equazione, perchè in quel modo che il calcolo fa vedere che il quadrato di $a+b$ è $a^2 + 2ab + b^2$, nell'istesso modo egli ci fa conoscere che il quadrato di $a-b$ è $a^2 - 2ab + b^2$.

Applicazion della precedente regola al risolvimento di qualche problema di secondo grado.

101. Per porre un problema in equazione, qualunque sia il di costei grado, bisogna seguir sempre la regola esibita (67).

Problema primo: Trovare un numero, al di cui quadrato aggiuntovi il suo ottuplo, abbiasi 33.

Chiamando x un tal numero, il suo quadrato sarà x^2 , ed $8x$ il di lui ottuplo; ma queste due grandezze prese insieme deggion fare 33, dunque dev' essere $x^2 + 8x = 33$.

Per risolver tal'equazione, aggiungasi a ciascun membro 16, che è il quadrato della metà del coefficiente 8 di x nel secondo termine, e si ha $x^2 + 8x + 16 = 33 + 16 = 49$; equazione il di cui primo membro è un quadrato perfetto. Estraggasi la radice quadrata da ciascun membro, praticando la regola esibita (100), e si ha $x + 4 = \pm 7$; quindi $x = \pm 7 - 4$, da cui si hanno questi due valori di x , $x = +7 - 4 = 3$, ed $x = -7 - 4 = -11$.

Di questi due valori, il primo soddisfa al problema, poichè 9 ch'è il quadrato di 3, aggiunto all'ottuplo di 3, cioè a 24, fa 33. Per ciò che spetta al secondo, come esso è negativo, così ci dinota che vi è un altro problema nel quale prendendo x in un senso totalmente opposto, la soluzione sarà 11; cioè, che il secondo valor di x soddisfar deve a quest' altro problema: Trovare un numero, dal di cui quadrato se

togliasi il suo ottuplo, rimane 33: lo che è in fatti, perchè il quadrato di 11 è 121, e l'ottuplo di 11 è 88, e dippiù $121 - 88 = 33$.

Per confermar ciò che si è detto sulle quantità negative (70), rileviamo che questo secondo problema posto in equazione, dà $x^2 - 8x = 33$, la qual risolta secondo le regole, offre $x = \pm 7 + 4$; cioè, questi due valori $x = 11$, ed $x = -3$, che son precisamente i contrarj di quelli del primo problema.

102. Da ciò vedesi che un'equazione del secondo grado, ad una sola incognita, ha sempre due soluzioni. Perchè i due valori 11 e -3 sostituiti, in luogo di x , nell'equazione $x^2 - 8x = 33$, la risolvono egualmente; cioè a dire, e l'uno e l'altro riducono il primo membro uguale a 33; lo che già si è osservato per 11. In riguardo a -3 , il suo quadrato è $+9$; e l'ottuplo di -3 è -24 , che tolto da $+9$, secondo quel che si è stabilito (11), offre $+9 + 24$, o sia 33.

Ma nello stesso tempo si vede, che se ogni equazione di secondo grado ha due soluzioni, non così sempre si avvera del problema che conduce a questa equazione; perchè, nel presente caso, il secondo valor -3 non risolve, se non se il problema contrario. Del resto, accade spesso che le due soluzioni dell'equazione, sono ambedue anche soluzioni del problema. Se ne troverà un esempio nel problema terzo.

Problema secondo. Debbonsi dividere 175 lire tra un certo numero di persone; ma ve ne son due assenti, che per tal motivo non debbono aver parte. Questa circostanza aumenta di 10 lire la parte di ciascuna delle presenti; cercasi quante persone sono?

Se si sapesse un tal numero, per sapere quanto spetterebbe a ciascuna se tutte le persone fosser presenti, si dividerebbe 175 per questo numero. Indi per sapere quanto spetta realmente alle persone presenti, si dividerà 175 per questo numero diminuito di 2; finalmente si vedrà se questo secondo quoto diminuito di 10 lire, sia uguale al primo. Imitinsi dunque queste operazioni, chiamando x il numero delle persone cercate.

Se tutte fosser presenti, ciascuna avrebbe $\frac{175}{x}$; ma se ve ne mancano due, ciascuna delle restanti avrà $\frac{175}{x-2}$; e poichè quest'ultimo numero dev'esser per dieci lire maggior del primo, perciò dev'essere $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Per risolvere una tal'equazione, tolgasi il denominatore, secondo la regola data (66), e si ha $175x - 10x(x-2) = 175(x-2)$, quali operazioni eseguite, si ha $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$; sopprimendo $175x$ dall'una parte e dall'altra, e cambiando di poi i segni (99), si ha $10xx - 20x = 350$; finalmente dividendo per 10, risulta $xx - 2x = 35$, equazion cui non deve farsi altro, che applicar la regola esibita (100). Prendasi dunque -1 metà del coefficiente -2 di x , e si quadri tal metà; si ha così $+1$, che si aggiunga a ciascun membro, dal che risulta $x^2 - 2x + 1 = 36$; estraendo la radice quadrata, si ha $x - 1 = \pm 6$, e perciò $x = \pm 6 + 1$, che esi-

bisce $x = 7$, ed $x = -5$. Il primo è il numero cercato: perchè 175 diviso per 7, dà 25; e 175 diviso per $7 - 2$, o sia per 5, offre 35 che eccede 25 per 10. In quanto al secondo, esso risolve il problema ove supporrassi, che trattasi di divider 175 lire alle persone date, accresciute di altre due che nuovamente sopraggiungono, e che questa circostanza diminuisce di 10 lire la porzion che ciascuna avrebbe avuto senza l'intervento delle due persone nuovamente sopraggiunte.

Problema terzo. Un uomo compra un cavallo, che poi a capo di qualche tempo vende per 24 ducati. In questa vendita egli perde tanto per cento, quanto ha comprato il cavallo. Dimandasi per quanto l'abbia comprato?

Se dimandasi quanto è costato il cavallo? si verificherà un tal numero in questa maniera. Cioè esso si sottrarrà da 100, e si farà questa regola del tre. Se 100 riducesi al residuo di questa sottrazione, a quanto devesi ridurre il numero cercato? Trovato questo quarto proporzionale, esso dev'essere uguale a 24.

Chiamisi dunque x il chiesto numero, cioè il numero dei ducati che è costato il cavallo. In tal caso poichè si è supposto che 100 riducesi a $100 - x$; si troverà a quanto riducesi x , facendo questa regola del tre, $100 : 100 - x :: x :$ al quarto proporzionale, il qual sarà $\frac{(100 - x) x}{100}$ (*Arit. 179*), o sia...

$$\frac{100x - xx}{100}; \text{ e poichè si è supposto che il prezzo del cavallo si è ridotto a 24 ducati, perciò dev'essere } \frac{100x - xx}{100} = 24.$$

Per isodar quest'equazione, tolgasi il denominatore e si ha $100x - xx = 2400$, in cui cambiandovi i segni, risulta $xx - 100x = -2400$. Aggiungasi dunque a ciascun membro il quadrato $+ 2500$ della metà $- 50$ di $- 100$, ed ottiensì $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$; da qual'equazione estratta la radice quadrata, risulta $x - 50 = \pm 10$, avendosi così $x = 50 + 10 = 60$, ed $x = 50 - 10 = 40$, dei quali due valori di x ciascuno risolve il problema; in modo che il prezzo del cavallo ha potuto essere sì 60, che 40 ducati; l'enunciazione del problema non è bastante a determinare qual di questi due prezzi ha avuto luogo. Se vogliansi verificare queste due soluzioni, si vedrà che se il cavallo è costato 60 ducati, perchè in tal caso 100 riducesi a 40, perciò 60. riducesi a 24. E nel secondo caso vedesi pure che riducendosi 100 a 60, 40 riducesi anche a 24.

105. Nei precedenti problemi, l'equazione ha avuto due soluzioni, una positiva, e l'altra negativa. Nell'ultimo essa ne ha due positive. Come pure la medesima può averne due negative. Ma ciò accade quando è viziosa l'enunciazione del problema; perchè in tal caso ciascuna di queste soluzioni negative, dinota (70) che l'incognita dev'esser presa in un senso tutto opposto a quello dell'enunciazione. Per esempio se proponesi questo problema; Trovare un numero tale, che se al suo quadrato aggiungesi il suo nuplo, ed anche il numero 50, il tutto faccia 30; un tal problema posto in equazione darà $x^2 + 9x + 50 = 30$, che risolta colle regole esposte di sopra, ne offre $x = -4$, ed $x = -5$. Lo che dinota che il problema dev'esser cambiato in quest'altro: Trovare

un numero tale, che se al suo quadrato aggiungesi 50 , e da tal somma togliesene il suo nonuplo , abbiasi 30 per residuo.

104. Dunque l'Algebra ha questo vantaggio , che non solo risolve i problemi , ma fa ancor conoscere se essi son bene o mal proposti ; e se sono impossibili anche il contrassegna: del che si è già dato il distintivo (98).

Se sen vuole nn esempio , risolvasi di nuovo il problema terzo ; supponendovi ventisei ducati in luogo di ventiquattro. L' equazion sarà $\frac{100x - xx}{100} = 26$, o sia $100x - xx = 2600$, o pure $xx - 100x = -2600$, che risolta secondo le regole , ne offre $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; or si è già veduto (98) , che la radice quadrata di una grandezza negativa è impossibile.

Problema quarto. *Due persone si son riunite per fare un negozio : la prima vi ha impiegato 30 luigi per mesi 17. La seconda vi ha posto la sua porzione a capo di 5 mesi ; cioè che l' ha tenuta impiegata per mesi 12. Questa porzione che ancor non si sa , assieme col guadagno che gli spetta, costituisce 26 luigi. Il guadagno totale è stato di luigi $16\frac{3}{4}$; dimandasi quanta è la porzione della seconda , e quanto ciascuna ha guadagnato ?*

. Il problema riducesi a trovar la porzione della seconda , perchè poi è chiaro che il guadagno di ciascuna sarà facile a determinarsi. Rappresentisi dunque

tal porzione per un numero x di luigi. Poichè 30 luigi della prima sono stati in società per mesi 17, essi han dovuto rendere tanto, quanto avrebber reso 17 volte 30 luigi, o sia 510 luigi in un sol mese. Parimente, poichè i luigi x della seconda sono stati 12 mesi in società, perciò essi han dovuto rendergli tanto, quanto l'avrebber reso 12 volte x di luigi, o sia luigi $12x$ in un sol mese; così può riguardarsi che la società sia durata un sol mese, ma però supponendo che le rispettive porzioni delle due persone sieno state luigi 510, $12x$; ciò essendo, per sapere quel che la seconda abbia guadagnato, bisogna (*Arit. 197*) determinare il quarto proporzionale di quest'analogia

$$510 + 12x : 18 \frac{3}{4} :: 12x :$$

Questo quarto termine sarà $\frac{12x \times 18 \frac{3}{4}}{510 + 12x}$, che riducesi a $\frac{225x}{510 + 12x}$; ma si è detto nell'enunciazione del problema, che il guadagno e la porzione della seconda persona fanno 26 luigi; dunque $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Per risolvere una tale equazione, si tolga il denominatore, e si ha $225x + x(510 + 12x) = 26(510 + 12x)$, o pur facendo le indicate moltiplicazioni, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Trasponendo e riducendo, si ha $12xx + 423x = 13260$; e dividendo per 12, risulta $x + \frac{423}{12}x = \frac{13260}{12}$, che riducesi ad $x + \frac{141}{4}x = 1105$; qual'equazion riso-

Iuta secondo le solite regole , ne dà $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}$; che pel sol valore che soddisfa al problema, ne offre $x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20$; essendo dunque la porzion della seconda di 20 luigi , il di lei guadagno è stato di 6 luigi , e quel della prima di $12 \frac{3}{4}$.

105. Per riguardo all'equazioni litterali , la regola è perfettamente la stessa. Se debbasi risolvere l'equazione $abx - axx = b^2c$; in conformità di ciò che si è detto (99 e 100) , si cambierà quest'equazione in $axx - abx = -b^2c$, poi in $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; si aggiungerà a ciascun membro il quadrato di $-\frac{b}{2}$; cioè, $+\frac{bb}{4}$, e si avrà $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$; estraendo la radice quadrata , si ha $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$, e finalmente $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$.

106. Quando l'equazione è litterale, essa può presentarsi sotto di una forma più composta di quel che finora si è veduto; ma si può sempre ridurre a tre termini nel seguente modo.

Sia l'equazione $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$.
Tutti i termini affetti dalla x si passino in un sol membro, osservando di scriver di seguito, tutti quelli che serbano la stessa potezza della x , e si ha $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Or si rifletta, che $ax^2 - bx^2 = (a-b) \times x^2 = (a-b)x^2$; parimente $bcx + acx = (bc + ac)x$, in modo che l'equazione $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ può scriversi così $(a-b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$; or le grandezze a, b, c essendo cognite, l'espressioni $a-b, bc + ac$, ed $a^2b - ab^2$ debbonsi riguardar tutte come grandezze cognite; dunque per abbreviare, ciascuna di tali grandezze si può rappresentar con una sola lettera, e supporre $a-b = m, bc + ac = n, a^2b - ab^2 = p$, ed allor l'equazione riducesi ad $mx^2 + nx = p$, che trovasi nel caso precedente, e che risolta colle stesse regole, diverrà successivamente $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, poi $x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$; indi estraendo la radice quadrata, $x + \frac{n}{2m} = \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; e finalmente $x = -\frac{n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$.

107. Del rimanente, allor faunosì queste specie di

trasformazioni, quando senza di esse il calcolo riesce complicatissimo; perchè in questo stesso esempio, dopo di aver posta l'equazione data sotto la forma $(a-b)x^2 + (bc+ac)x = a^2b - ab^2$, senza molto calcolo, si può trattare come le precedenti, dividendo da principio per $a-b$, lo che dà $x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x = \frac{a^2b - ab^2}{a-b}$; indi bisogna aggiungere

a ciascun membro il quadrato della metà di $\frac{bc+ac}{a-b}$, cioè, il quadrato di $\frac{bc+ac}{2a-2b}$; ma si può esser contento d'indiarlo in questo modo $\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2$; così si

avrà $x^2 + \frac{bc+ac}{a-b}x + \left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 = \left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a-b}$; estraendo la radice quadrata si avrà....

$$x + \frac{bc+ac}{2a-2b} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a-b}\right]},$$

$$\text{e finalmente } x = \frac{-bc-ac}{2a-2b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a-b}\right]}.$$

103. Quando si è conchiuso il valor di x , benchè si possa rimanere il radicale nello stato in cui è, finchè si passi alle applicazioni numeriche; pure può esser utile di recargli una più semplice forma; riducendo allo stesso de-

nomiatore le due parti che trovansi sotto di esso. Su di che bisogna osservare, che spesso si possono ridurre allo stesso denominatore d'una maniera più semplice di quella della regola generale (47), lo che si ottiene conformandosi alle osservazioni fatte (48).

Per esempio prendasi $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$: per ridurre allo stesso denominatore le due grandezze $\frac{n^2}{4m^2}$ e $\frac{p}{m}$, si osservi che gli attuali lor denominatori hanno un comun fattore m , e quindi se moltiplicansi i due termini del fratto $\frac{p}{m}$, per $4m$ ch'è il secondo fattore del primo denominatore, allora esso avrà lo stesso denominatore di questo primo fratto, e così cambiasi $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$ in $\sqrt{\left(\frac{n^2 + 4pm}{4m^2}\right)}$; or come questo radicale indica che deve estrarsi la radice quadrata dal fratto a lui sottoposto, cioè (Arit. 142) dal di costui numeratore e denominatore; così estraesi quella del denominatore ch'è un quadrato, e si ha $\frac{\sqrt{(n^2 + 4pm)}}{2m}$; per cui essendosi nella superiore equazione trovato $x = \frac{-n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$, un tal valor di x può mutarsi in quest'altro $x = \frac{-n}{2m} \pm \frac{\sqrt{(n^2 + 4pm)}}{2m}$; o pure a motivo del comun deno-

$$\text{minatore } 2m, \text{ in quest'altro } x = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 4pm}}{2m}$$

*Dell' Estrazion della radice quadrata delle
grandezze littèrali.*

109. Dunque il risolvimento dell' equazioni del secondo grado, come si è veduto, conduce ad estrar la radice quadrata dalle grandezze sien numeriche, sien littèrali. Relativamente alle prime, niente altro deve aggiungersi a quel che se n'è detto in Aritmetica. Per cui si farà parola delle seconde.

Allor che si è parlato della moltiplicazion delle grandezze monomie (18), si è detto che il prodotto contener doveva tutte le lettere sì del moltiplicando, che del moltiplicatore; or quando elevasi una grandezza a quadrato, il moltiplicando e 'l moltiplicatore sono i stessi; dunque in un quadrato monomio, ciascuna lettera della radice dev' esser fattore due volte; per cui l' esponente di ciascuna lettera di un quadrato monomio, dev' esser doppio di quello di ciascuna medesima lettera della radice; dunque *per aver la radice quadrata di un monomio, bisogna a ciascuna sua lettera dar la metà del di lei esponente*; seguendo questa regola, la radice quadrata di a^4 è a , quella di a^6 è a^3 , l'al-

tra di $a^4 b^4 c^4$ è abc , e l'altra di $a^4 b^6 c^4$ è $a^4 b^5 c^4$.

110. Se si troverà un esponente impari, ciò sarà un segno che la grandezza proposta non è un quadrato perfetto; allor seguendo la regola, rimarrà un esponente frazionario che dinoterà che rimane ad estrar la radice quadrata dalla grandezza che avrà quest'esponente. Così la radice quadrata di $a^4 b^3 c^4$ è $ab^{\frac{3}{2}} c^2$, o sia $abb^{\frac{1}{2}} c^2$: perchè può considerarsi $a^4 b^3 c^4$, come se fosse $a^4 b^4 bc^4$.

Quì dunque l'esponente frazionario ha lo stesso uso del segno $\sqrt{}$; così $abb^{\frac{1}{2}} c^2$, o sia $abc^2 b^{\frac{1}{2}}$, equivale ad $abc^2 \sqrt{b}$. Dunque reciprocamente, se una grandezza monomia è affetta dal segno $\sqrt{}$, questo si potrà sopprimere, purchè prendesi la metà di ciascuno esponente.

111. Quest'osservazione serve a render più semplici le grandezze affette dal segno $\sqrt{}$, quando però ciò è possibile. Per esempio, la grandezza $\sqrt{a^4 b^4 c}$ essendo la stessa che $a^2 b^2 c^{\frac{1}{2}}$, riducesi ad $abb^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, o pur, rimettendo il radicale in luogo degli esponenti frazionarij, ad $ab\sqrt{bc}$. Similmente $\sqrt{a^4 b^4 c^5}$ riducesi ad $a^2 b^2 c^2 \sqrt{c}$, considerando $a^4 b^4 c^5$ come $a^4 b^4 c^4 ac$,

e prendendo la metà degli esponenti 4, 4, e 2. Dell'istesso modo si troverà che $\sqrt[4]{\frac{a^3}{f}}$; riducesi ad $a\sqrt{\frac{a}{f}}$; o pure ad $a\sqrt{\frac{af}{f^2}}$, moltiplicando il numeratore e'l denominatore per f , o finalmente ad $\frac{a}{f}\sqrt{af}$.

112. Vedesi dunque che per far sortire fuori del radicale i fattori che posson farsene sortire, bisogna prendere la metà degli esponenti loro. Al contrario per introdurre sotto del radicale un qualche fattore che sarà al di fuori, bisognerà duplicare il suo esponente, cioè, elevare un tal fattore a quadrato. Così, $a\sqrt{b}$ può cambiarsi in $\sqrt{a^2b}$; $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ può cambiarsi in $\sqrt{\frac{a^2b}{a}}$, che riducesi a $\sqrt{ab}$. Similmente,

$(a+b)\sqrt{c}$ può cambiarsi in $\sqrt{(a+b)^2c}$.
 113. Fin quì non si è affatto riguardato il coefficiente. Onde se abbiasene alcuno che sia un quadrato perfetto; se n'estrarrà la radice quadrata secondo le regole dell'Aritmetica; così $\sqrt{9a^2b^3}$, diviene $3ab\sqrt{b}$. Similmente.....
 $\sqrt{1024a^2b^3c}$, diviene $32ab\sqrt{bc}$.

114. Ma se il coefficiente non sia un quadrato perfetto, bisognerà vedere se esso pos-

sa scomporsi in due fattori , dei quali uno sia quadrato perfetto , dal quale si estrarrà la radice , e l' altro si rimarrà sotto del radicale ; così $\sqrt{48 a^3 b^3}$ riducesi a $4ab \sqrt{3b}$, perchè essendo $48 = 16 \times 3$, $\sqrt{48 a^3 b^3} = \sqrt{16 \times 3 a^3 b^3} = \sqrt{16 a^3 b^3} \times \sqrt{3b} = 4ab \sqrt{3b}$. Similmente si troverà , che $\sqrt{512 a^5 b^3}$ riducesi a $16ab \sqrt{2a}$.

115. Se la grandezza affetta dal segno radicale è composta , e non è un quadrato perfetto ; bisogna esaminare se essa possa scomporsi in due fattori , dei quali uno sia quadrato perfetto ; perchè se ciò si avvera , in tal caso da questo si estrarà la radice , e l'altro rimarrà sotto del radicale. Quando vi è il fattor quadrato , ed è monomio , egli sempre facilmente si ravvisa. Per esempio nella grandezza $\sqrt{(4a^3 b^3 - 5a^2 b^3 + 6b^3)}$, vedesi che b^3 è fattor di tutt' i termini , in modo che essa equivale a quest' altra $\sqrt{[(4a^3 - 5a^2 b + 6b^3) \times b^3]}$; dunque si estrae la radice quadrata da b^3 , e si ha $b \sqrt{(4a^3 - 5a^2 b + 6b^3)}$.

116. Ma quando questo fattor quadrato sia composto , o quando la grandezza composta ch'è sotto del radicale , sia ella stessa un quadrato perfetto , per averne la radice , bisogna ben guardarsi di estrar separatamente la radice da ciascun dei termini che la costituiscono. Per esempio , se abbiasi $a^2 + b^2$, si sba-

glierebbe molto se si prendesse $a + b$ per di lei radice quadrata, poichè il quadrato di $a + b$ non è $a^2 + b^2$, ma $a^2 + 2ab + b^2$ (25); $a^2 + b^2$ non ha affatto radice esatta in lettere. Ecco il metodo che bisogna seguire allor che la grandezza composta che si propone è suscettibile di una radice esatta.

117. Sia dunque la grandezza $36a^2 + 60ab + 25b^2$. Per averne la radice quadrata, si ordinino i termini di questa grandezza relativamente ad una delle sue lettere: per esempio, relativamente ad a .

$$\begin{array}{r}
 36a^2 + 60ab + 25b^2 \\
 \underline{- 36a^2} \qquad \qquad \qquad \left\{ \begin{array}{l} 6a + 5b \text{ Radice.} \\ 12a + 5b \end{array} \right. \\
 + 60ab + 25b^2 \\
 \underline{- 60ab - 25b^2} \\
 0
 \end{array}$$

Prendesi la radice quadrata del primo termine $36a^2$, la quale è $6a$, e che scrivesi accanto alla grandezza proposta.

Questa radice si quadra, ed il di lei quadrato $36a^2$ scrivesi sotto del primo termine, col segno $-$, per sottrarlo. Fatta la riduzione, rimane $+ 60ab + 25b^2$.

Sotto della radice $6a$ scrivesi il suo doppio $12a$, che impiegasi per dividere il primo termine $60ab$ della rimanente quantità $60ab + 25b^2$. Si ha per quoto $+ 5b$ che scrivesi in seguito della radice $6a$, e si ha

$6a + 5b$ per la richiesta radice; ma per confermare questa operazione, scrivesi anche il quoto $5b$ che si è trovato, allato di $12a$, e si moltiplica il totale $12a + 5b$ per lo stesso quoziente $5b$; i prodotti si portano, a misura che si ottengono sotto della grandezza $60ab + 25b^2$, osservando di cambiargli i segni; di poi facendo la riduzione, non resta niente; conchiudesi che la trovata grandezza $6a + 5b$ è l'esatta radice quadrata di $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Prendasi per secondo esempio la grandezza $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Si ordini essa relativamente ad a , e si ha

$$\begin{array}{r}
 4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 \underline{- 4a^2} \\
 1.^{\circ} \text{ Res. } -12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 \\
 \quad + 12ab \quad \quad - 9b^2
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{Radice.} \\ 2a - 3b + 4c \\ 4a - 3b \\ 4a - 6b + 4c \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r}
 2.^{\circ} \text{ Residuo } + 16ac - 24bc + 16c^2 \\
 \quad - 16ac + 24bc - 16c^2 \\
 \hline
 \end{array}$$

Ultimo residuo.....0

Si estrae la radice quadrata da $4a^2$: essa è $2a$, che scrivesi allato. Si fa il quadrato di $2a$, che scrivesi col segno $-$ sotto di $4a^2$; fatta la riduzione, rimane $-12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$.

Al di sotto della radice $2a$ scrivesi il suo doppio $4a$, che impieghasi per dividere il primo termine $-12ab$ del residuo: si ha per quoto $-3b$, che scrivesi in

★

seguito del primo termine $2a$ della radice : scrivesi anche allato del doppio $4a$, e tutta la quantità $4a - 3b$ si moltiplica per lo stesso quoto $-3b$; scrivendo i prodotti sotto del residuo $-12ab + 16ac$, ec., ma cambiandovi però prima i lor segni; e fatta la riduzione, si ha per secondo residuo, $+16ac - 24bc + 16c^2$.

Or si considerino i due termini $2a - 3b$ della radice, come se costituiscano una sola grandezza, la qual si raddoppi, e si scriva al di sotto per servir di divisore al secondo residuo; ma per fare questa divisione, basta, secondociò che si è detto (36), di dividere il primo termine $+16ac$, pel primo termine $+4a$ del divisore; si ha $4c$ per quoto, che scrivesi in seguito della radice $2a - 3b$, ed in seguito del doppio $4a - 6b$: si moltiplichì quest' ultima somma $4a - 6b + 4c$, pel novello termine $+4c$ della radice; e secondo che si hanno questi prodotti, a misura gli si cambino i segni, e si scrivano sotto del secondo residuo; facendo la sottrazione, non rimane niente.

Dal che conchiudesi che la trovata radice è esatta.

Tutto ciò è fondato su di questo principio, che il quadrato di una grandezza composta da due termini, contiene il quadrato del primo, il doppio del primo moltiplicato pel secondo, e 'l quadrato del secondo; poichè da ciò ne segue, che per avere il primo termine, bisognerà estrarre la radice quadrata dal primo quadrato; che per avere il secondo, bisognerà dividere il termine seguente, pel doppio della radice ritrovata; e finalmente che per verificare, bisognerà moltiplicare il doppio del primo termine pel secondo, e 'l secondo per se stesso; or questo è appunto quello che prescrive il metodo che si è esposto.

I Principianti si esercitino ancora sulle tre seguenti grandezze. 1.^o $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$. 2.^o $36b^4 - 60ab^3 + 25a^2b^2 - 36b^2c^2 + 30abc^2 + 9c^4$. 3.^o $a^6 - 4a^5c^2 + 8a^4c^3 + 4c^6 - 16c^5c^2 + 16c^6$, le di cui radici quadrate si troveranno essere rispettivamente $4a^2 + 5ab$, $6b^2 - 5ab - 3c^2$, $a^3 - 2c^3 + 4c^2$.

*Del calcolo delle grandezze affette dal
segno $\sqrt{}$.*

118. Sulle grandezze radicali, delle quali or si è parlato, fannosi le stesse operazioni che sulle altre grandezze. Quando le due grandezze radicali non son simili, per sommarle o sottrarle, basterà di unirle col segno +, o col segno —. Così $3a\sqrt{b}$ sommata con $4b\sqrt{c}$, offre $3a\sqrt{b} + 4b\sqrt{c}$; similmente $5a\sqrt{b}$ tolta da $4b\sqrt{c}$, ne dà $4b\sqrt{c} - 5a\sqrt{b}$. Ma se le grandezze radicali son simili, e differiscono soltanto pel coefficiente numerico giacente fuori del radicale; in tal caso sommansì o sottraggonsi i coefficienti, secondochè si tratta di addizione o di sottrazione. Per esempio, $4ab\sqrt{c}$, sommato con $5ab\sqrt{c}$, ne dà $9ab\sqrt{c}$.

Quì si suppone che i radicali sonosi ridotti come si è insegnato (112); poichè se debbasi $4b\sqrt{a^3c}$ sommare con $6a\sqrt{ab^3c}$; si comincerà dal ridurre il primo radicale a $4ab\sqrt{ac}$,

e 'l secondo a $6ab \sqrt{ac}$, i quali sommati, es-
biscono $10ab \sqrt{ac}$.

Per moltiplicar due grandezze radicali, biso-
gna eseguir l'operazione come se i radicali non
vi fossero affatto, ed indi soggettare il pro-
dotto al segno radicale.

Per esempio, per moltiplicare $\sqrt{a}$ per $\sqrt{c}$, si mol-
tiplicherà a per c , e si soggetterà il prodotto ac
al segno $\sqrt{}$, così si avrà $\sqrt{ac}$. Per moltiplicare
 $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ per $\sqrt{ac}$, si avrà $\sqrt{(a^3c + ab^3c)}$.
Similmente $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{(a+b)} \times$
 $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{(a+b)^2} = a+b$. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$
 $= \sqrt{(-a)^2} = -a$ (*). Vedesi dunque che per qua-
drare una grandezza affetta dal segno $\sqrt{}$, non deve
farsi altro che toglier questo segno; così per quadra-
re $\sqrt{(a^2b + b^3)}$, si avrà $a^2b + b^3$.

(*) Non bisogna affatto confondere $\sqrt{(-a)^2}$ con $\sqrt{-a^2}$
il primo è $\sqrt{(-a \times -a)}$, e 'l secondo è $\sqrt{(-a \times +a)}$.
A questo proposito si farà un'osservazione che credesi oppor-
tunissima. Poichè $-a \times -a$ ne dà $+a^2$, la di cui radice
è $\pm a$ (96), perciò $\sqrt{-a \times -a}$ deve dare $\pm a$; intanto qui
si assegna solamente $-a$. La ragione è facile. Quando dimandasi
qual'è la radice di $+a^2$, allora è ragionevole di assegnare tanto $+a$
quanto $-a$; perchè in tal caso niente ne determina, se si con-
sidera $+a^2$, come ottenuta da $+a \times +a$, o da $-a \times -a$;
ma quando dimandasi qual'è il valore di $\sqrt{-a \times -a}$;
benchè questa grandezza, secondo le regole, si riduce a $\sqrt{+a^2}$,

119. Quest'osservazione può servire a liberare un'equazione dai segni $\sqrt{}$, che essa può contenere. Per esempio, se abbiassi l'equazione $x - 2a = b + \sqrt{ax}$, si rimarrà in un membro soltanto $\sqrt{ax}$, e si avrà $x - 2a - b = \sqrt{ax}$; allora quadrando ciascun membro, si avrà $x^2 - 4ax - 2bx + 4aa + 4ab + bb = ax$, o pur trasponendo, $x^2 - 5ax - 2bx = -4aa - 4ab - bb$.

120. Per dividere una grandezza radicale, per un'altra anche tale, si farà la divisione come se non vi fossero affatto i segni $\sqrt{}$, e si sottoporrà il quoto o la frazione, al segno radicale; così per dividere $\sqrt{a}$ per $\sqrt{b}$, si dividerà a per b , qual cosa darà $\frac{a}{b}$, che sottoposta al radicale, si avrà $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Per dividere $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{a}$, si dividerà ab per a , lo che darà b , e si avrà $\sqrt{b}$ per quoto. Per divide-

pure non deve prendersi che $-a$, perchè la stessa operazione qui fatta in che modo si è ottenuto $+a$. Facendo quest'attenzione rilevasi che $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$, deve dare $-\sqrt{ab}$, e non già $+\sqrt{ab}$; perchè essendo $\sqrt{-a}$ lo stesso che $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, e $\sqrt{-b}$ lo stesso che $\sqrt{b} \times \sqrt{-1}$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ farà $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, o sia $\sqrt{ab} \times \sqrt{(-1)^2}$, che riducesi a $-\sqrt{ab}$, poichè $\sqrt{(-1)^2} = -1$.

re $\sqrt{aa - xx}$ per $\sqrt{a + x}$, si dividerà $aa - xx$ per $a + x$, e si otterrà $a - x$, e si avrà $\sqrt{a - x}$ pel quoto richiesto. Similmente $ab\sqrt{bc}$ divisa per $a\sqrt{b}$, darà $b\sqrt{c}$, con dividere ab per a , e $\sqrt{bc}$ per $\sqrt{b}$.

121. Se fosse razionale il dividendo o il divisore, si separerebbe l'un dall'altro con una ben lunga barra, per far conoscere che un di essi non è affetto dal segno radicale. Per esempio, per dividere a per $\sqrt{b}$, si scriverebbe $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Per dividere a per $\sqrt{a}$, si scriverebbe $\frac{a}{\sqrt{a}}$; ma quando vi è un'eguaglianza

nelle lettere del dividendo e del divisore, spesso giova di esibir la grandezza razionale sotto la forma di radicale, perchè così sono eseguibili delle semplificazioni; in fatti nell'ultimo esempio, si cambierebbe a in $\sqrt{a^2}$, ed in tal caso in vece di $\frac{a}{\sqrt{a}}$, si avrebbe $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$, o sia $\sqrt{a}$. Similmente se si dovrebbe $\sqrt{aa - xx}$ dividere per $a + x$, si scriverebbe $\frac{\sqrt{aa - xx}}{a + x}$,

o sia $\frac{\sqrt{aa - xx}}{\sqrt{(a + x)^2}}$, o pure $\sqrt{\frac{aa - xx}{(a + x)^2}}$; e come il numeratore e'l denominatore sono divisibili ciascuno per $a + x$, così finalmente si avrebbe $\sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$.

Della formazione delle potenze delle grandezze monomie, dell'estrazione delle di loro radici; e del calcolo dei radicali, e degli esponenti.

122. Di già si è detto che chiamasi *potenza* di una grandezza, il prodotto di questa moltiplicata per se stessa più volte di seguito. Di a la terza potenza o il cubo è a^3 , perchè a^3 risulti da $a \times a \times a$. La grandezza che si è moltiplicata è tante volte fattore nella potenza, quante sono le unità del di costei esponente: così in a^5 , a è fattore cinque volte; in $(a+b)^6$, $a+b$ è fattor sei volte.

125. Perchè per moltiplicare le grandezze litterali monomie che han degli esponenti, basta di sommare (20) l'esponente di ciascuna lettera del moltiplicando, con quello della simil lettera del moltiplicatore; ne segue dunque, che per *elevare una grandezza monomia ad una data potenza*, basterà di moltiplicare l'attuale esponente di ciascuna delle sue lettere, pel numero che dinota a qual potenza vuolsi elevare questa grandezza. Un tal numero dicesi l'*esponente della potenza*.

Così per elevare a quarta potenza $a^2 b^3 c$, scrivesi $a^8 b^{12} c^4$, perchè gli esponenti 2, 3,

ed 1 di a , b , e c sonosi moltiplicati per l'esponente 4 della potenza alla quale si è voluto elevare $a^4 b^4 c^4$. In fatti per elevare $a^4 b^4 c^4$ a quarta potenza, bisognerebbe moltiplicare $a^4 b^4 c^4$ per $a^4 b^4 c^4$: indi questo prodotto per $a^4 b^4 c^4$, e poi questo secondo prodotto nuovamente per $a^4 b^4 c^4$; or per effettuare queste moltiplicazioni, bisogna sommar gli esponenti (20); e perchè essi sono i stessi in ciascun fattore, perciò bisogna sommare ciascuno esponente quattro volte con se stesso, cioè moltiplicarlo per 4. Qualunque sia la potenza cui voglia elevarsi un monomio, e qualunque sieno delle di costui lettere gli esponenti, il ragionamento è sempre lo stesso.

Quando sugli esponenti delle grandezze debbonsi fare dei ragionamenti o delle operazioni che non dipendono affatto dai particolari valori di essi, ma che sono applicabili ugualmente ad ogni loro specie; allora questi esponenti rappresentansi con lettere. Così, per farne l'applicazione alla regola or data; se vuolsi la qual si voglia grandezza $a^m b^n c^r$ elevare ad una qualunque potenza espressa per r , si scriverà $a^{mr} b^{nr} c^{r^2}$.

124. Se la grandezza che vuolsi elevare ad una data potenza, sia una frazione, si eleverà a tal potenza sì il numeratore che il de-

nominatore; così $\frac{a^5 b^5}{c d^5}$ elevata a quinta potenza diviene $\frac{a^{10} b^{10}}{c^5 d^{10}}$; parimente $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ elevata a potenza r , diviene $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

125. Se la grandezza proposta abbia un coefficiente, essa si eleverà ad una data potenza, elevando anche quello ad una tal potenza, moltiplicandolo per se stesso colle regole dell'Aritmetica; così $4a^3 b^2$ elevata a quinta potenza darà $1024 a^{15} b^{10}$. Qualche volta una tal potenza del coefficiente si accenna solamente, come si fa colle lettere; e la detta potenza di $4a^5 b^2$ si può scrivere così $4^5 a^{15} b^{10}$.

126. In riguardo ai segni, se è pari l'esponente della potenza che deve farsi, essa avrà sempre il +; ma se quello è impari, essa avrà il segno +, o'l segno —, secondochè la grandezza che a tal potenza si eleva avrà essa stessa il +, o il —; questa è una conseguenza immediata della regola stabilita pei segni (24).

127. Da tutto ciò che si è detto ne segue, che in una qualunque potenza, l'attuale esponente di ciascuna lettera, contiene quello della sua radice tante volte, quante sono le unità dell'esponente della potenza che si considera; per esempio, nella quarta potenza l'esponente

di ciascuna lettera è quadruplo dell' esponente della stessa lettera nella grandezza , che a tal potenza si è elevata, e che perciò n'è la sua radice.

128. Dunque per ritornare da una qualunque potenza alla sua radice , cioè , *per estrarre la radice di un dato grado , da una qualunque grandezza monomia , bisogna dividere l' attuale esponente di ciascuna sua lettera , pel numero che indica il grado della radice che si vuole estrarre.* Un tal numero chiamasi *l' esponente della radice.*

Così per estrarre la radice cubica , o sia terza da $a^{18} b^6 c^3$, si dividerà ciascun degli esponenti per 3 , e si avrà $a^6 b^2 c$. Parimente per estrarre la radice quinta da $a^{25} b^{15} c^5$, si dividerà ciascun degli esponenti per 5 , e si avrà $a^5 b^3 c$. In generale per estrarre la radice del grado r dalla grandezza $a^m b^n$, si scriverà $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

129. Se la grandezza proposta fosse una frazione , si estrarrà la radice separatamente dal numeratore e dal denominatore.

130. Se sienvi dei coefficienti , si estrarrà da essi la data radice per i metodi stabiliti in Aritmetica , se trattasi di radice quadrata o cubica ; e se trattasi di radice più elevata , essa s'avrà per quel che in appresso si dirà.

131. Quando l'esponente della radice che si vuole estrarre, non divide esattamente ciascun degli esponenti della grandezza proposta, ciò è una prova che tal grandezza non è una potenza perfetta del grado di cui trattasi. Allor l'esponente rimane frazionario, ed indica che tuttavia devesi estrarre una radice. Così, se si dimanda la radice cubica di $a^3 b^5 c^4$, si avrà $a^3 b c^{\frac{4}{3}}$ o sia $a^3 b c c^{\frac{1}{3}}$, nella quale l'esponente $\frac{1}{3}$ indica che ancor rimane ad estrarre la radice cubica da c .

132. Ancora impiegasi il segno $\sqrt{}$ per indicar l'estrazioni delle radici superiori al secondo grado, ma sull'apertura di tal segno si situa il numero che indica il grado della radice di cui trattasi. Così $\sqrt[3]{a}$ indica la radice cubica di a : $\sqrt[7]{a}$ dinota la radice settima di a . Dunque bisogna riguardare le due espressioni $\sqrt[5]{a}$ ed $a^{\frac{1}{5}}$, come dinotanti la stessa

cosa: così è pure di $\sqrt[6]{a^4}$, e di $a^{\frac{4}{6}}$.

133. Quando la grandezza è composta, non bisogna dividere ciascun dei suoi esponenti; ma bisogna considerar la totalità delle sue parti come costituente una sola grandezza, il di cui

esponente naturalmente è 1, il qual dividesi per l'esponente della radice che trattasi di estrarre, lo che a parlar propriamente, non è altro che un'indicazione di tal radice; per esempio, in luogo di $\sqrt[4]{(a^3 + b^3)}$ che è lo stesso di $\sqrt[4]{(a^3 + b^3)^1}$, scrivesi $(a^3 + b^3)^{\frac{1}{4}}$ o pure $\overline{a^3 + b^3}^{\frac{1}{4}}$. Se la grandezza che sta sotto del radicale abbia di già un esponente, si dividerà similmente quest'esponente, per quello della radice che devesi estrarre. Così, in vece di $\sqrt[4]{(a^3 + b^3)^3}$, può scriversi $(a^3 + b^3)^{\frac{3}{4}}$.

154. Le regole stabilite (118 e seg.) per l'addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione delle grandezze radicali del secondo grado, si applicano ugualmente alle grandezze radicali di gradi superiori, purchè i radicali su dei quali devesi operare, sien dello stesso grado tra loro. Così $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a \sqrt[7]{a}$; $\sqrt[6]{a^3 b^3} \times \sqrt[6]{a^5 b^5} = \sqrt[6]{a^8 b^8} = \sqrt[6]{a^6 b^6} = ab$; $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}$.

155. Se trattasi di elevare un qualunque radicale ad una potenza il cui esponente sia lo stesso di quello del radicale, basterà di toglier questo, così $(\sqrt[5]{a})^5 = a$; lo che

è generalmente manifesto, se si fa attenzione, che allor l'oggetto è di ricondurre la grandezza al suo primiero stato.

Per elevare una grandezza radicale monomia ad una qualunque potenza, bisogna elevar ciascuno dei suoi fattori a tal potenza, secondo la regola data (123). Così $\sqrt[7]{a^3 b^5}$ elevata a quarta potenza, ne dà $\sqrt[7]{a^3 b^5}$ che riducesi ad $ab \sqrt[7]{ab^5}$; ciò che può vedersi anche in quest' altro modo: $\sqrt[7]{a^3 b^5}$ essendo la stessa cosa di $a^{\frac{3}{7}} b^{\frac{5}{7}}$ (132), per elevar questa a quarta potenza, si moltiplicano i suoi esponenti per 4, dal che si ottiene $a^{\frac{12}{7}} b^{\frac{20}{7}}$
 $= ab a^{\frac{5}{7}} b^{\frac{5}{7}} = ab \sqrt[7]{ab^5}$.

136. Per dividere $\sqrt[7]{a^3}$ per $\sqrt[7]{a^5}$, si dividerà a^3 per a^5 , ed al quoto a^2 si darà il segno $\sqrt[7]{}$, ciò che offre $\sqrt[7]{a^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Similmente } \frac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} &= \sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2}; \frac{a}{\sqrt[5]{a^5}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^5}} = \sqrt[5]{a^2}; \frac{\sqrt[5]{a^5}}{a} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^5}} = \\ \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^5}} &= \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}; \text{ perchè la radice quinta} \end{aligned}$$

di 1 è 1. In generale , ogni potenza ed ogni radice dell' unità , è la stessa unità.

137. Per estrarre qualunque radice da una grandezza radicale , bisogna moltiplicare l'attuale esponente del radicale , per l'esponente di questa nuova radice ; così , per estrarre la radice terza da $\sqrt[5]{a^4}$, si scriverà $\sqrt[15]{a^4}$, moltiplicando 5 per 3. In fatti $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; or (128) per estrarre tal radice da questa , bisogna dividere il suo esponente per 3 , lo che ne dà $a^{\frac{4}{15}}$, che è lo stesso di $\sqrt[15]{a^4}$.

138. Quando le proposte grandezze radicali non son tutte dello stesso grado , per praticar su di esse le operazioni dell'addizione , sottrazione , moltiplicazione , e divisione , bisogna ridurle al medesimo grado ; lo che facilmente si esegue colla seguente regola.

Se abbiansi due soli radicali , si moltiplichino l'esponente dell' uno , per quel dell' altro ; il prodotto sarà il comune esponente che dovranno avere i due radicali : nello stesso tempo si elevi la grandezza giacente sotto di ciascun di essi , alla potenza dinotata dall'esponente dell' altro.

Per esempio , per ridurre allo stesso grado i due radicali $\sqrt{a^3}$ e $\sqrt[7]{a^4}$, si moltiplica 5 per 7 , e 'l

(161)

prodotto 35 sarà l'esponente dei nuovi radicali; indi a^5 si eleva a potenza settima, ed a^7 alla quinta, avendosi così a^{35} ed a^{35} , in modo che i nuovi radicali in cui cambiansi i proposti, sono $\sqrt[35]{a^{35}}$ e $\sqrt[35]{a^{35}}$.

Se si hanno più di due radicali, *moltiplicansi tra loro tutti gli esponenti di essi; il prodotto sarà il comune esponente degli altri radicali, cui i proposti dovranno ridursi. Nello stesso tempo, la grandezza che sta sotto di ciascun radicale elevasi alla potenza indicata dal prodotto degli esponenti di tutti gli altri rimanenti radicali.*

Per esempio, se abbiansi i tre radicali $\sqrt[5]{a^5}$, $\sqrt[7]{a^7}$, e $\sqrt[8]{a^8}$; si moltiplicheranno gli esponenti 5, 7, ed 8, e'l prodotto 280 sarà il comune esponente dei radicali da ottenersi; indi a^5 si eleverà alla potenza 7×8 , o sia 56.^{ma}; a^7 alla potenza 5×8 , o sia 40.^{ma}; ed a^8 alla potenza 5×7 , o sia 35.^{ma}, e si avranno così $\sqrt[280]{a^{56}}$, $\sqrt[280]{a^{40}}$, e $\sqrt[280]{a^{35}}$, che saranno i proposti ridotti allo stesso grado.

La ragion di questa regola facilmente si comprende, osservando sul primo esempio, che quando, secondo la regola, elevasi a^5 alla potenza settima, nello stesso tempo estraesì la

radice settima dalla sua radice quinta , cioè che

$\sqrt[5]{a^5}$ ad un tempo elevasi a potenza settima , e se n' estrae la radice settima , per cui il risultato $\sqrt[55]{a^{11}}$, ha lo stesso valore di $\sqrt[5]{a^5}$: d'onde rilevasi , che nel ridurre i radicali allo stesso grado colla regola ora esibita , in essi producesi soltanto cambiamento di espressione , e non già di valore.

139. Da questo ragionamento può conchiudersi , che quando l'esponente della grandezza ch'è sotto del radicale , e quello del radicale medesimo , hanno un comun divisore ; può semplificarsi l'espressione , con dividere ciascun di quelli esponenti , per questo comun divisore : per esempio , $\sqrt[12]{a^8}$ può ridursi a $\sqrt[3]{a^2}$, con dividere per 4 sì 12 , che 8. Parimente $\sqrt[4]{a^3}$ può ridursi a $\sqrt[3]{a}$, e $\sqrt[6]{a^3}$ pure a $\sqrt[2]{a}$.

140. Conchiudesi ancora , che quando l'esponente della radice che si vuole estrarre , è un numero composto dal prodotto di due o più altri numeri , una tale estrazione può farsi successivamente in questa maniera : Suppongasì che si dimandi la radice sesta di a^{12} ; da principio si può estrarre la radice quadrata , indi la cubica , e così la radice sesta. In fatti

$\sqrt[6]{a^4}$, riducesi (139) a $\sqrt[3]{a^2}$; indi a $\sqrt[3]{a^4}$, o sia ad $a^{\frac{4}{3}}$, che è lo stesso che se si fosse presa tutta insieme la radice sesta di a^4 con dividere l'esponente, 24 per 6, (128).

Del resto, come gli esponenti frazionarj fan le veci di radicali, ed i primi impiegansi più comodamente dei secondi nel calcolo; così si dirà anche qualche cosa sul calcolo degli esponenti.

Se debbasi moltiplicare $\sqrt[3]{a^5}$ per $\sqrt[4]{a^4}$, questa operazione si cambierà in quest'altra $a^{\frac{5}{3}} \times a^{\frac{4}{4}}$ che (20), ne dà $a^{\frac{7}{3}}$, o sia $a a^{\frac{4}{3}}$ che riducesi ad $a \sqrt[3]{a^4}$. Se debbasi moltiplicarsi $\sqrt[3]{a^5}$ per $\sqrt[7]{a^4}$, scrivesi $a^{\frac{5}{3}} \times a^{\frac{4}{7}}$, o sia $a^{\frac{5}{3} + \frac{4}{7}}$, o pure $a^{\frac{35+12}{21}}$ (col ridurre i due fratti allo stesso denominatore); o ad $a^{\frac{47}{21}}$, che riducesi ad $a a^{\frac{16}{21}}$, o finalmente ad $a \sqrt[21]{a^{16}}$.

In generale $\sqrt[n]{a^p} \times \sqrt[r]{a^q}$, cambiasi in $a^{\frac{p}{n}} \times a^{\frac{q}{r}}$ che riducesi ad $a^{\frac{p}{n} + \frac{q}{r}}$, o sia ad $a^{\frac{pr+qr}{nr}}$ (col ridurre allo stesso denominatore), o finalmente (132) a $\sqrt[nr]{a^{pr+qr}}$. Lo stesso

è della divisione; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^5}}$ mutasi in $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{5}{5}}} = a^{\frac{4}{5}-1} = a^{-\frac{1}{5}}$ (31), o fi-

nalmente in $\sqrt[5]{a}$. Parimente $\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[5]{a^5 b^5}}$ cambiasi in

$$\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{5}{5}} b^{\frac{5}{5}}} = a^{\frac{3}{5}-1} b^{\frac{4}{5}-1} = a^{-\frac{2}{5}} b^{-\frac{1}{5}} \quad (31), \text{ o sia in } a^{\frac{3-2}{5}} b^{\frac{4-1}{5}}$$

$b^{\frac{3-1}{5}}$ (col ridurre i fratti allo stesso denominatore),

• pure in $a^{\frac{3-2}{5}} b^{\frac{4-1}{5}}$, che è lo stesso di $\sqrt[5]{a^{-2} b^3}$. In

$$\text{generale, } \frac{\sqrt[n]{a^m b^p}}{\sqrt[r]{a^s b^t}} = \frac{a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{p}{n}}}{a^{\frac{s}{r}} b^{\frac{t}{r}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{s}{r}} b^{\frac{p}{n}-\frac{t}{r}} =$$

$$a^{\frac{rm-mr}{rm}} b^{\frac{pq-mr}{rm}} = \sqrt[r]{a^{rm-mr} b^{pq-mr}}.$$

141. In quest' ultimo esempio si è sottratto l'esponente di ciascuna lettera del denominatore, da quello della simile lettera del numeratore. La regola stabilita (31) per la divisione, non sembra di permetterlo, che quando l'esponente del denominatore è più piccolo di quello del numeratore; ma ciò si può generalmente, basta che nel caso contrario, dopo fatta la riduzione, diasi al residuo il segno —. In modo che ogni frazione algebrica

può generalmente mettersi sotto forma d' intero.

Per esempio in vece di $\frac{a^5}{b^3}$, può scriversi $a^5 b^{-3}$. In fatti, seguendo l'idea che si è data della divisione, l'effetto che produce un divisore, si è di distruggere nel dividendo tutt'i fattori che in esso divisore ritrovansi; in $\frac{a^5}{a^3}$, che riducesi ad a^2 , il divisore a^3 distrugge in a^5 due fattori uguali ad a . Parimente in $\frac{a^5}{b^3}$, b^3 deve distruggere in a^5 due fattori uguali a b . Or benchè questi due fattori non vi esistono affatto esplicitamente, pure posson sempre rappresentarsi: poichè è chiaro che a contiene b un certo numero di volte, sia intero, sia fratto, qual numero sia m ; in tal caso a equivale ad m volte b , cioè ad mb , onde $a^5 = m^5 b^5$; per cui la grandezza $\frac{a^5}{b^3}$ sarà uguale ad $\frac{m^5 b^5}{b^3}$, o sia ad $m^5 b^{5-3}$, cioè (20) ad $m^5 b^2 b^{-3}$, o finalmente ad $a^5 b^{-3}$.

Dunque, in generale, una grandezza può farsi passare dal denominatore al numeratore, collo scrivercela come fattore, ma cambiando il segno all'esponente che aveva nel denominatore.

Così in vece di $\frac{1}{a^3}$, può scriversi $1 \times a^{-3}$, o semplicemente a^{-3} ; in vece di $\frac{1}{a^m}$, può scriversi a^{-m} .

per $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$, può scriversi $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Per $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$, può scriversi $(a^3 + b^3) \times (a^2 + b^2)^{-1}$; ed avuto riguardo a tutto ciò che si è detto, in luogo di $\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^3 + b^3)^5}}$, può scriversi $\frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^3 + b^3)^{\frac{5}{4}}}$, o sia finalmente $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^3 + b^3)^{-\frac{5}{4}}$.

142. Ed all'opposto, se in una grandezza sieno dei fattori che abbiano gli esponenti negativi, questi fattori potranno far passare nel denominatore, ma però rendendo positivi i loro esponenti. Così, in vece di $a^3 b^{-4}$, può scriversi $\frac{a^3}{b^4}$; in luogo di a^{-3} ch'è lo stesso di $a^{-1} \times a^{-2}$, può scriversi $\frac{a^{-1}}{a^2}$, e così pure negli altri casi simili.

Della formazione delle potenze delle grandezze composte, e dell'estrazione delle di loro radici.

143. Seguendo l'idea che si è stabilita delle potenze, quando vuolsi elevare una grandezza composta ad una data potenza, non deve farsi altro, che moltiplicare una tal grandezza tante volte per se stessa, quante sono le unità,

toltane però una, dell'esponente di questa potenza: ma limitandosi a questo mezzo, si caderebbe spessissimo in ben lungi calcoli per pervenire a certi risultati, che possonsi ottenere con molto minor fatica, sol che un poco si rifletta alle proprietà dei prodotti di qualcuna di queste moltiplicazioni.

Ciò premesso, or si tratterà delle potenze dei binomj, poichè queste conducono alla formazione di quelle di qual si sia altra grandezza più composta; ma per far capire in tutta la sua estensione tutto ciò che si sarà per dire, si riprenderanno le cose un pò più dall'alto; si esaminerà qual'è la natura dei prodotti che si hanno con moltiplicar successivamente più fattori binomj, che abbian tutti un comun termine: questa ricerca che ne condurrà direttamente al proposto oggetto, ne somministrerà nello stesso tempo varie proposizioni, che in seguito riusciranno utilissime.

144. Sien dunque $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ cc. più binomj che abbian tutti il comun termine x , e che vogliansi tra lor moltiplicare.

Moltiplicando $x + a$
 per..... $x + b$
 si avrà $x^2 + ax + ab$
 $+ bx$

Moltiplicando questo prodotto per $x + c$,
si avrà

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + abx + abc \\ + bx^2 + acx \\ + cx^2 + bcx \end{aligned}$$

Moltiplicando questo secondo prodotto per
 $x + d$, si avrà

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + abx^2 + abcx + abcd \\ + bx^3 + acx^2 + abdx \\ + cx^3 + adx^2 + acdx \\ + dx^3 + bcx^2 + bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{aligned}$$

E così in seguito; lo che ne offre le seguenti osservazioni, prendendo per un sol termine tutti quelli, che sono in una stessa colonna verticale.

1.^o Il primo termine di ciascun prodotto è sempre il primo termine x di ciascun binomio, elevato però alla potenza dinotata dal numero di questi; in modo che se il numero di essi sia m , il primo termine di ciascun prodotto sarebbe x^m .

2.^o Le potenze della x van successivamente diminuendo di una unità, fino all'ultimo termine, che contiene soltanto x .

3.^o I moltiplicatori di ciascuna potenza della x , (che in appresso diransi moltiplicatori

del termine in cui trovansi tali potenze), pel secondo termine , sono la somma dei secondi termini a, b, c , ec. dei binomj; pel terzo termine , la somma dei prodotti di tali grandezze a, b, c , ec. moltiplicate a due a due; pel quarto termine , la somma dei prodotti delle stesse grandezze a, b, c , ec. moltiplicate a tre a tre; e così in seguito fino all'ultimo termine ch'è il prodotto di tutte queste grandezze. Tali conseguenze son sempre le stesse, qualunque sia il numero dei binomj $x + a, x + b$, ec. che sonosi moltiplicati.

145. Or se supponesi , che tutte le grandezze a, b, c , ec. sieno uguali , in qual caso tutt' i binomj che sonosi moltiplicati saranno uguali ; i prodotti quì sopra ottenuti , saran conseguentemente le successive potenze di qualunque di tali binomj , di $x + a$, per esempio , se si è supposto che le grandezze b, c, d , ec. sono uguali ciascuna ad a . Dunque se in vece di b, c, d , ec., in ciascuno di questi prodotti ponesi a , avransi pe' valori delle potenze che trovansi allato notate , i seguenti risultati.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$$

In dove vedesi , che se l' esponente della

potenza, cui vuolsi elevare il binomio sia m , le successive potenze della x saranno x^m , x^{m-1} , x^{m-2} , x^{m-3} , x^{m-4} , ec.

Ma da ciò che si è detto non ancor vedesi al certo con chiarezza, come i coefficienti dei diversi termini di ciascuna potenza derivano gli uni dagli altri; e neppure qual'è la di lor dipendenza dall'esponente m della potenza di cui trattasi, dal-qual per altro essi dipendono, come ora si vedrà.

146. Per rinvenire la legge di tali coefficienti, bisogna ritornare ai primieri prodotti, e rimarcare che poichè il moltiplicatore del secondo termine è la somma di tutte le grandezze a , b , c , ec.; perciò quando tutte queste saranno uguali ad a , bisognerà ch'egli sia composto da a presa tante volte, quante son tali grandezze; dunque se il di lor numero è m , tal moltiplicatore sarà m volte a , o sia ma , cioè che il suo coefficiente m sarà uguale all'esponente del primo termine della potenza di cui trattasi. Lo che vedesi anche nelle tre potenze particolari, che sonosi esibite quì sopra.

Veggasi ora quali debbano essere i moltiplicatori degli altri termini. È evidente che tutt'i prodotti ab , ac , ad , bc , bd , ec. divengono uguali ciascuno ad a^2 , nella presente supposizione;

parimente tutt' i prodotti abc , abd , ec. divengono uguali ciascuno ad a^3 , e così in seguito. Dunque allora il moltiplicatore d'el terzo termine di ciascuno dei primieri prodotti, riducesi ad a^2 presa tante volte, quanti sono i prodotti che possonsi ottenere nel moltiplicare a , b , c , ec. a due a due. Parimente quello del quarto termine riducesi ad a^3 presa tante volte, quanti sono i prodotti che ottengonsi nel moltiplicare a , b , c , ec. a tre a tre, e così in seguito; dunque per avere il coefficiente numerico dei termini terzo, quarto, ec. della potenza m del binomio $x+a$, il tutto riducesi a determinare quanti prodotti può dare un numero m di lettere a , b , c , ec. moltiplicate tra loro rispettivamente a due a due, a tre a tre, ec.

147. Or se siavi un qualunque numero m di lettere, le quali combininsi a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ec. senza mai ripetere una stessa lettera in una stessa combinazione, rilevasi

1.° Chè il numero delle combinazioni a due a due, è duplo del numero dei prodotti di due lettere, i quali sieno realmente differenti. In fatti, due lettere posson combinarsi l'una coll'altra in due maniere differenti; per esempio a e b darebbero queste due combi-

nazioni ab e ba ; ma esse però non costituiscono al certo due differenti prodotti.

2.° Il numero delle combinazioni di più lettere a tre a tre, è sestuplo dei prodotti di tre lettere, realmente distinti: in fatti, per aver le combinazioni di tre grandezze a , b , c , dopo di averne cambinate due a e b , per esempio, ciò che ne dà ab e ba , bisogna combinar la terza c con ciascuna delle due primiere combinazioni, cioè assegnare ad essa tutte le possibili disposizioni, relativamente alle lettere a e b che entrano in ab e ba ; or ciò ne dà sei differenti combinazioni di tre lettere, come chiaramente rilevasi dalle seguenti disposizioni abc , acb , cab , bac , bca , cba ; ma ciascuna di queste sei combinazioni costituisce sempre lo stesso prodotto.

Un simile ragionamento proverà che quattro grandezze son suscettibili di 24 combinazioni, ciascuna delle quali intanto costituisce sempre lo stesso prodotto; dunque il numero dei prodotti distinti che possonsi avere combinando più lettere a quattro a quattro, è la 24.ª parte del total numero delle medesime combinazioni. Parimente il numero dei prodotti distinti che ottener si possono combinando più lettere a 5 a 5, a 6 a 6, a 7 a 7, ec. è la 120.ª, la 720.ª, la 5040.ª ec. parte del total

numero di queste combinazioni ; cioè , in generale, un tal numero è dinotato da una frazione che ha per numeratore il numero totale delle combinazioni, e per denominatore il prodotto di tutt'i numeri 1, 2, 3, 4, ec. fino a quello che indica di quante lettere ciascun prodotto è composto.

148. Vedasi adunque qual' è il numero totale delle combinazioni che possono avere da un numero m di lettere a , b , c ec.; prese a due a due, a tre a tre ec.

Poichè una medesima lettera non deve certamente combinarsi con se stessa, perciò nelle combinazioni a due a due essa dovrà combinarsi colle rimanenti $m-1$, per cui la medesima darà $m-1$ combinazioni ; dunque poichè in tutto si hanno m lettere , perciò esse daran combinazioni m volte $(m-1)$, o sia $m \cdot (m-1)$. Sicchè seguendo ciò che si è detto (147), il numero dei prodotti realmente differenti, di due lettere, sarà $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

In riguardo alle combinazioni a tre a tre : per averle, bisogna che ciascuna delle combinazioni a due a due, sia combinata con ciascuna delle lettere che essa non contiene affatto, cioè, con un numero di lettere dinotato da $m-2$; dunque ciascuna di queste

combinazioni darà $m-2$ combinazioni di tre lettere; onde poichè sonovi $m(m-1)$ combinazioni di due lettere, delle quali ciascuna deve dare $m-2$ combinazioni di tre lettere; perciò in tutto si avranno $m(m-1)(m-2)$ combinazioni di tre lettere: e poichè (124) il numero dei prodotti realmente distinti, e la sesta parte di questo total numero delle combinazioni, perciò quel sarà $m \cdot \frac{(m-1) \cdot (m-2)}{6}$,

$$\text{o sia } m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}.$$

Della stessa maniera si dimostrerà, che il numero delle combinazioni a quattro a quattro sarà $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; poichè bisognerà combinare ciascuna combinazione di tre lettere, con tutte le altre lettere che non trovansi in questa combinazione, e che essendo tali lettere al numero di $m-3$, esse per ciascuna combinazione di tre lettere, daranno $m-3$ combinazioni di quattro lettere; essendo dunque il numero delle combinazioni a tre a tre $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$, quello dell'e combinazioni a quattro a quattro sarà $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; e poichè il numero dei prodotti a quattro a quattro, realmente differenti, è la ventiquattresima parte

di questo numero di combinazioni, perciò egli sarà $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \dots$

Con un simile ragionamento si dimostrerà, che il numero dei prodotti realmente distinti che possonsi ottenere col moltiplicare un numero m di lettere a 5 a 5, a 6 a 6, ec. sarà espresso rispettivamente per $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$,

per $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$, ec.

149. Dunque da ciò, e da quel che si è detto (146) conchiudesi, che i termini successivi del binomio $x+a$ elevato alla potenza m , cioè di $(x+a)^m$ sono

$$x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \text{ec.}$$

Cioè, che il primo termine della serie che esprime questa potenza, è il primo termine x del binomio, elevato alla potenza m ; che di poi gli esponenti della x van successivamente diminuendosi d'una unità, e gli altri della a , all'opposto, van continuamente aumentandosi di una unità, ma però a cominciar dal secondo termine, ch'è quello appunto in cui essa comincia ad entrare. Per riguardo ai coef-

ficienti m , $m \cdot \frac{m-1}{2}$, ec. bisogna osservare, che quello del secondo termine è uguale all'esponente del primo: che quello del terzo, ch'è $m \cdot \frac{m-1}{2}$, è il coefficiente m del precedente moltiplicato per $\frac{m-1}{2}$, cioè per la metà dell'esponente della x dell'istesso termine precedente. Parimente, il coefficiente del quarto, ch'è $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$, ottiensì moltiplicando il coefficiente $m \cdot \frac{m-1}{2}$ del precedente, per $\frac{m-2}{3}$, cioè per la terza parte dell'esponente della x dell'istesso termine precedente; e così in seguito. Or tutte queste conseguenze, che ne somministra la semplice ispezione, ne conducono alla seguente regola generale: *Il coefficiente di un qualunque termine ottiensì, prima moltiplicando il coefficiente del precedente, per l'esponente della x dello stesso termine; ed indi dividendolo pel numero che dinota da quanti termini è preceduto quello, di cui si sta determinando il coefficiente.*

Stabilita questa regola, vogliasi or formare, per esempio, la settima potenza di $x+a$. Si avrà

$(x + a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$; collo scrivere prima x^7 , indi moltiplicando questo per 7, diminuendo il suo esponente di una unità, e finalmente moltiplicandolo per a , lo che ne dà $7ax^6$.

Poi si moltiplica questo per $\frac{6}{2}$, si diminuisce l'esponente della x di una unità, e di una unità si accresce quel della a , e si ha per terzo termine $21a^2x^5$.

In oltre questo terzo termine si moltiplica per $\frac{5}{3}$, si diminuisce l'esponente della sua x di una unità, e di una unità si accresce quel della a , e si ha $35a^3x^4$ per quarto termine: similmente operando in appresso, è facile di terminare.

Se abbiasi $x - a$ in vece di $x + a$, in tal caso i termini, cominciando dal primo, avranno alternativamente i segni $+$ e $-$; perchè se, per esempio, in a^4 si sostituisce $-a$ in vece di $+a$, il di lei segno non cambiasi affatto (126); ma questo cambiasi sicuramente, se si sostituisce $-a$ in una potenza impari di a .

La medesima formola ora stabilita può servire ad elevare ad una data potenza, non solamente un binomio semplice come $x + a$, ma anche un binomio composto come $x^2 + a^3$, o $x^3 + a$, o $x^5 + a^3$, ec.; e similmente non solo

ad elevare ad una potenza il cui esponente sia un numero intero e positivo, ma anche ad una potenza il cui esponente sia positivo o negativo, intero o fratto. Ma questi usi di una tal formola, per maggior comodo, esiggon che a lei diasi un'altra forma.

$$150. \text{Riprendasi dunque la formola } (x+a)^m \\ = x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \text{ec.}$$

Seguendo ciò che si è detto (142), in vece di x^{m-1} , può scriversi $\frac{x^m}{x}$; in vece di x^{m-2} , scriversi $\frac{x^m}{x^2}$; in vece di x^{m-3} , scriversi $\frac{x^m}{x^3}$, e così in seguito. Conformemente a questo principio, si potrà dunque cambiar la proposta formola in quest'altra $(x+a)^m = x^m + \frac{m a x^m}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2 x^m}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3 x^m}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4 x^m}{x^4} + \text{ec.}$

Or se si riflette che tutt' i termini han per comun fattore x^m , a tal formola potrà darsi quest'altra forma: $(x+a)^m = x^m$

$$\left(1 + \frac{ma}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + \text{ec.} \right), \text{ nella quale } x^m \text{ moltiplica tutto ciò}$$

che sta racchiuso nelle due parentesi. Da ciò rilevasi la regola seguente, per formar comodamente la serie de' termini che deggion comporre la potenza m del binomio $x + a$.

151. Scrivansi in una prima linea, come qui segue, le grandezze.

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \text{ ec.}$$

$$1 + m \cdot \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4}{x^4}, \text{ ec.}$$

E scritta l'unità al di sotto, e ad un luogo più avanti sulla sinistra, formisi la serie inferiore colla seguente legge.....

Si moltiplichino questa unità, pel primo termine della serie superiore e per $\frac{a}{x}$, e si avrà il secondo termine della serie inferiore.

Si moltiplichino questo secondo termine, pel secondo della serie superiore ed anche per $\frac{a}{x}$, e si avrà il terzo termine della serie inferiore.

Si moltiplichi questo terzo termine, pel terzo della serie superiore, ed anche per $\frac{a}{x}$, e si avrà il quarto termine della serie inferiore; e così in seguito.

Riuniscansi tutti i termini di questa serie inferiore, e la di lor totalità si moltiplichi per x^m , e si avrà così il valore di $(x + a)^m$.

152. Se in vece di $x + a$, abbiasi $x^s + a^s$ o $x^s + a^s$, o ec; in vece di moltiplicar successivamente per $\frac{a}{x}$, nel primo caso si moltiplicherà per $\frac{a^s}{x^s}$, nel secondo per $\frac{a^s}{x^s}$, e generalmente, pel secondo termine del binomio diviso pel primo: e nel primo caso, si moltiplicherà la totalità per x^s elevata alla potenza m ; e nel secondo, per x^s elevata alla potenza m ; cioè, in generale, pel primo termine del binomio elevato alla data potenza.

Finalmente se 'l secondo termine del binomio, in vece di avere il segno +, abbia il segno -, siccome, quando il dato binomio è stato $x + a$, o $x^s + a^s$, o ec., si è fatta la moltiplicazione successivamente e rispettivamente per $\frac{a}{x}$, o per $\frac{a^s}{x^s}$, o ec.; così si moltiplicherà successivamente

per $-\frac{a}{x}$, o per $-\frac{a^2}{x^2}$, o ec., se il binomio sarà rispettivamente $x - a$, o $x^2 - a^2$, o ec.

Per darne un esempio, suppongasi di voler la sesta potenza di $x^3 + a^3$; procedasi come qui sotto.

$$6 \quad \frac{5}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

Cioè, che dopo scritta la serie $6, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}$ ec, che

corrisponde ad $m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}$, ec.

e dopo scritta l'unità al di sotto, per primo termine della seconda serie; si moltiplica questo primo termine, pel primo 6 della serie superiore, e per $\frac{a^3}{x^3}$, lo che

dà $\frac{6a^3}{x^3}$, per secondo termine. Si moltiplica $\frac{6a^3}{x^3}$ pel

secondo termine $\frac{5}{2}$ della serie superiore, e per $\frac{a^3}{x^3}$, e

si ha $\frac{15a^6}{x^6}$ per terzo termine, e così in seguito. Fi-

nalmente si moltiplica la totalità dei termini formati con questa legge, per x^3 elevata alla potenza 6, cioè

$$(125) \text{ per } x^{18}, \text{ e si ha } x^{18} + \frac{6a^3 x^{15}}{x^3} + \frac{15a^6 x^{12}}{x^6} + \frac{20a^9 x^9}{x^9} + \frac{15a^{12} x^6}{x^{12}} + \frac{6a^{15} x^3}{x^{15}} + \frac{a^{18} x^0}{x^{18}}, \text{ che riducesi}$$

ad $x^{12} + 6a^2 x^{15} + 15a^6 x^{18} + 20a^9 x^9 + 15a^{12} x^6 + 6a^{15} x^3 + a^{18}$.

153. Se in vece di un binomio, debbasi elevare ad una data potenza un trinomio, il qual, per esempio, sia $a + b + c$ che vogliasi elevare a terza potenza; si porrà $b + c = m$, e si avrà il binomio $a + m$ da elevarsi a terza potenza, la qual secondo le regole ora stabilite sarà $a^3 + 3a^2 m + 3am^2 + m^3$. E sostituendovi ora per m il suo valore $b + c$, si avrà $a^3 + 3a^2 (b + c) + 3a (b + c)^2 + (b + c)^3$. Or le potenze $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ essendo tutte di binomio, si troveran pure colle regole precedenti; e non resterà poi altro a fare, che di moltiplicare $3a^2$ per $(b + c)$, e $3a$ per $(b + c)^2$. Compiendo il calcolo, si avrà $a^3 + 3a^2 b + 3a^2 c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2 c + 3bc^2 + c^3$.

154. Ma riflettendo un poco sulla regola dell' elevarzione dei binomj, si vedrà che la potenza di un polinomio qualunque può formarsi in un modo più facile, osservando la regola seguente.

Sia da elevarsi il trinomio $a + b + c$ a terza potenza. Pongasi $b + c = p$, ed allor trattasi di elevare $a + p$ a potenza terza, lo che ne dà.....

$$a^3 + 3a^2 p + 3ap^2 + p^3.$$

Scrivesi sotto ciascun termine di tal grandezza, il qual contiene la p , l' esponente di questa; si moltiplica ciascun di essi pel numero corrispondente, ed in ciascun di quelli che contengono la p , cambiassi una p in b , avendosi così.....

$$3a^2 b + 6abp + 3b^2 p^2.$$

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

Scrivesi sotto ciascun termine che contien la p la metà dell' esponente di questa , e si moltiplicano in corrispondenza , il termine e 'l numero sottoposto , cambiando ancora in ognun di essi una p in b , e si ha.

$$3ab^4 + 3b^4 p.$$

$$\frac{1}{5}$$

Scrivesi sotto ciascun termine che contien la p , la terza parte dell' esponente di questa ; si moltiplicano in corrispondenza il termine ed il numero sottoposto , cambiando ancora in ognun di essi una p in b , e si ha..... b^3 .

Finalmente riunisconsi tutte queste quattro linee , cambiandovi tutte le p in c , e si ha $a^5 + 3a^4 c + 3ac^4 + c^5 + 3a^4 b + 6abc + 3bc^4 + 3ab^4 + 3b^4 c + b^5$, come appunto si è qui sopra ottenuto.

Così si moltiplicherà ciascun termine della prima linea, nel quale è p , per l'esponente di p ; ciascun termine della seconda, nel quale è p , per la metà dell'esponente di p in questa seconda ; ciascun termine della terza , nel quale è p , per la terza parte dell'esponente di p in questa terza , e così in seguito ; osservando di cambiare una p in b in ciascuna linea , cominciando dalla seconda , e finalmente cambiando tutte le rimanenti p in c . Questa regola s'applica similmente ai quadrimomj , ed a qualsivoglia altra specie di polinomj.

Dell' Estrazione delle Radici delle grandezze composte.

155. Quando una volta si è nello stato di trovar tutt' i termini, dai quali componesi una proposta potenza di un dato binomio, è facile ancor di rilevarne il metodo di estrarre una radice di un dato grado da una data grandezza, sia essa litterale, o pur numerica: ciò che si dirà per l'estrazione della radice quinta, basterà a far capire in che modo debbasi procedere per estrarre le radici di tutti gli altri gradi.

Secondo la formola delle potenze di un binomio, la quinta potenza di $a + b$ è $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Di questi sei termini i due primi bastano per istabilir la regola che si cerca.

Il primo è la quinta potenza del primo termine del binomio, e'l secondo è il quintuplo della quarta potenza dell'istesso primo termine, moltiplicato pel secondo; dunque per avere il primo termine della radice, dopo di aver ordinato tutt' i termini della data potenza, bisogna estrarre la radice quinta dal primo termine di questa potenza; e per avere il se-

condo termine della radice , bisogna dividere il secondo termine della proposta grandezza, pel quintuplo della quarta potenza del già trovato primo termine della radice. In fatti, è chiaro che la radice quinta di a^5 è a , ch'è il primo termine del binomio, di cui la grandezza $a^5 + 5a^4b + \text{ec.}$ n'è la quinta potenza; ed è evidente del pari, che $\frac{5a^4b}{5a^4}$ ne porge b ch'è il secondo termine del medesimo binomio. Or per assicurarsi se la proposta grandezza sia una perfetta potenza del quinto grado, dopo di averne nell' indicato modo estratta la radice, bisognerà verificar questa coll'elevarla al quinto grado, e sottrar poi il risultato dalla data grandezza, eccone un esempio.

Cercasi la radice quinta di.....

$$\begin{array}{r|l}
 52a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 & \text{Radice} \\
 -32a^5 & 2a + 3b \\
 \hline
 \text{Resid. } +240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 & 80a^4
 \end{array}$$

Si estrae la radice quinta da $32a^5$, ed essa è $2a$ che scrivesi alla radice.

Elevasi $2a$ alla quinta potenza, e scrivesi il prodotto $32a^5$ col segno contrario, sotto del primo termine $32a^5$ della proposta grandezza, ciò che lo distrugge.

Si eleva la radice $2a$ alla quarta potenza, ed indi di questa si prende il quintuplo, avendosi così $80a^4$ che scrivesi sotto della radice $2a$, affin di divider per essa grandezza, il primo termine $240a^4b$ del residuo; fatta la divisione, si ha per quoto $3b$ che scrivesi pure alla radice; e si ha così $2a + 3b$ per la radice cercata. Or per vie più assicurarsene, elevasi $2a + 3b$ a quinta potenza, e ritrovansi i medesimi termini della data grandezza; in modo che facendo la sottrazione non resta niente; d'onde conchiudesi che la radice è esattamente $2a + 3b$.

Se si dovesse avere anche un altro termine alla radice, allor dopo di questa prima operazione, avrebbesi un altro residuo: ed in tal caso si riguarderebbe $2a + 3b$ come una sola grandezza, colla quale per trovare il terzo termine, si oprerebbe come si è oprato con $2a$ per trovare il secondo.

156. In riguardo alle grandezze numeriche, la regola è totalmente la stessa; la sola cosa che bisogna rischiarare si è, a qual distintivo si riconoscerà ciò che corrisponde al primo termine a^5 della quinta potenza del binomio $a + b$, e ciò che corrisponde al di lei secondo termine $5a^4b$.

Per ben condursi in questa ricerca, bisogna supporre che del binomio $a + b$ ne discogni a le decine, e b le unità; allora è chiaro che a^5 dinoterà le centinaia di migliajo, perchè la quinta potenza di 10 è 100000; dunque il

primo termine a^5 , o la grandezza da cui estraendo la radice quinta, si ha la prima cifra della radice, non può esser compresa nelle cinque ultime cifre a dritta; dunque si separeranno queste ultime cinque cifre, e supposto che ne restin soltanto cinque o pur meno a sinistra, da queste si estrarrà la radice quinta, che si otterrà facilmente, dovendo essa essere una sola cifra.

Trovata tal prima cifra della radice, e sottratta la sua quinta potenza dalla grandezza, da cui essa si è estratta, allato del residuo si abbasseranno le ultime cinque separate cifre: e per aver quella porzione che bisogna dividere per $5a^4$, cioè pel quintuplo della quarta potenza delle trovate decine, bisognerà separare quattro cifre a dritta, e dividere la porzione che rimane a sinistra: perchè $5a^4b$, ch'è la porzione da dividersi per $5a^4$ per contener b , non può far parte delle ultime quattro cifre, giacchè essendo essa il prodotto di $5a^4$ per b ; la medesima dev'essere almeno decine di migliajo, per essere decine di migliajo la stessa a^4 .

Premessi questi rischiaramenti, il modo di procedere è lo stesso di quello dell'estrazione letterale; eccone un esempio.

Dimandasi la radice quinta di.....

$$\begin{array}{r}
 3802.04032 \{ 52 \\
 \underline{3125} \\
 6770.4032 \\
 \underline{3125} \\
 380204032 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Si separano le cinque ultime cifre 04032, ed indi si cerca la radice quinta di 3802, il quale avendo meno di cinque cifre, non può avere che una sola cifra per tal radice; essa è 5 che scrivesi allato.

Elevasi 5 a quinta potenza, ed essa è 3125 che scrivesi sotto di 3802 per sottrarnela; rimane 677, allato del quale si abbassano le cinque cifre separate da principio; da questo totale si separano quattro cifre a dritta, e si divide la restante porzione 6770, pel quintuplo della quarta potenza della trovata radice 5, cioè per cinque volte 625, o sia 3125. Si ha per quoto 2, che scrivesi allato della prima trovata cifra 5. Per verificar questa radice 52, si eleva essa alla quinta potenza, e si ha lo stesso numero proposto, dal che rilevasi che 52 è la radice esatta.

Se vi fosse un residuo, e si volesse approssimar maggiormente la radice; a quello si aggiungerebbero cinque zeri, e come si è fatto per ottenere la seconda cifra, così si farebbe per aver la terza, la qual sarebbe un decimale.

In generale, per estrarre una radice di un qualunque grado m , da un qual si sia dato

numero, bisogna divider questo, procedendo da destra a sinistra, in classi di cifre m ciascuna, l'ultima delle quali ch'è più a sinistra, può averne anche meno. Poi da quest'ultima classe si estrae la radice del grado m , la qual non mai può aver più d'una cifra: allato del residuo si discende la classe seguente, separansi da questa totalità $m-1$ cifre a dritta, e si divide la restante porzione a sinistra, per la radice trovata, elevata prima alla potenza $m-1$, e poi moltiplicata per m ; e così successivamente. Tutto ciò è fondato sul principio, che i due primi termini di un binomio $a + b$ elevato ad una qualunque potenza m , sono $a^m + ma^{m-1}b$, e su quella osservazione, chè se a dinota delle diecine, e b delle unità, a^m non può esser contenuta dalle ultime m cifre, ed $ma^{m-1}b$ non può esser contenuta dalle ultime $m-1$, cifre.

*Del modo di approssimar le radici delle
potenze imperfette delle grandezze
litterali.*

157. Quando la data grandezza composta non è una potenza perfetta del grado della radice che si cerca, allor non può al certo ottenersi

radice esatta, e bisogna limitarsi ad approssimarla tanto, quanto l' esige il problema pel quale è necessaria una tale estrazione. A ciò potrà pervenirsi seguendo il metodo già esposto per le potenze perfette, il qual ne darà una serie di termini frazionarj, il cui valore decrescendo continuamente, permette di limitarsi ad un certo numero di termini, e di trascurare gli altri: ma però l'operazione sarà lunga e penosa. Allo stesso intento potrà pervenirsi per una strada molto più breve, impiegando la regola data quì sopra (151), per elevare un binomio ad una data potenza. A tal uopo bisogna ricordarsi, che ogni radice può esprimersi con una potenza frazionaria, perchè (155) tanto è, per esempio, $(a+b)^{\frac{1}{2}}$, quanto è $\sqrt{a+b}$.

Dunque seguendo la regola esibita (151), scrivesi la serie.

$$\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}-2}{3}, \frac{\frac{1}{2}-3}{4}, \frac{\frac{1}{2}-4}{5}, \text{ ec.}$$

Che riducesi ad... $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10}, \text{ ec.}$

E ponendo 1 per primo termine, si forma questa seconda serie.....

$$1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{b^4}{a^4} + \frac{35}{1280} \frac{b^5}{a^5}, \text{ ec.}$$

Col moltiplicare il primo termine 1 , pel primo termine $\frac{1}{2}$ della prima serie , e per $\frac{b}{a}$, cioè pel secondo termine del binomio $a + b$ diviso pel primo ; si ha $\frac{1}{2} \frac{b}{a}$ pel secondo termine.

Similmente si forma il terzo , col moltiplicar questo secondo termine pel secondo termine $-\frac{1}{4}$ della prima serie , e per $\frac{b}{a}$, ciò che dà $-\frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2}$ pel terzo termine.

Per formare il quarto , moltiplicasi questo terzo , pel terzo termine $-\frac{1}{8}$ della prima serie , e per $\frac{b}{a}$, e si ha così $+\frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3}$ per quarto termine , e così in seguito.

Finalmente moltiplicasi la totalità di questi termini , pel primo termine del binomio , elevato a potenza $\frac{1}{2}$, e pel valore di $(a + b)^{\frac{1}{2}}$, o sia di $\sqrt{a + b}$, e si ha la seguente grandezza :

$$a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16} \frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128} \frac{b^4}{a^4} + \frac{55}{1280} \frac{b^5}{a^5} . \text{ ec. } \right)$$

che facilmente può prolungarsi quanto stimerassi a proposito.

158. In seguito , si vedrà l'uso di queste specie di approssimazioni ; al presente basterà mostrare come esse possano impiegarsi ad estrarre le radici dai numeri. Suppongasì di voler estrarre la radice quadrata da 101. Si dividerà 101 in due parti , delle quali

una sia il massimo quadrato che contiensi in tal numero, per esempio, dividerassi il 101 nelle due parti 100 ed 1, ed indi potrassi $100 = a$; ed $1 = b$; per conseguenza $a^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$, e $\frac{b}{a} =$

$\frac{1}{100} = 0,01$; dunque la serie che esprime $\sqrt{a+b}$,

cioè in questo caso $\sqrt{101}$, sostituendo per $a^{\frac{1}{2}}$ e $\frac{b}{a}$

i lor valori, diverrà

$$10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{(0,01)^3}{16} - \frac{5(0,01)^4}{128} + \frac{35(0,01)^5}{1280}, \text{ ec. } \right)$$

Suppongasì che una tal radice voglia approssimarsi fino ad una diecimillesima; allor basterà di prendere i tre primi termini; poichè il quarto che è $\frac{(0,01)^5}{16}$, riducesi ad $\frac{0,000001}{16}$ cioè a 0,0000000625;

e benchè esso deve moltiplicarsi per 10 comun fattore di tutt' i termini della serie; pure non produrrà che 0,000000625 ch'è molto minore di una diecimillesima. I termini seguenti, per più forte ragione, ne son continuamente molto minori, poichè dovendosi continuamente moltiplicare per 0,01 che è una frazione, essi debbon continuamente diminuirsi; perchè moltiplicando una grandezza per una frazione, il prodotto è una parte di quella grandezza che si è moltiplicata (*Arit.* 120.)

Dunque il valor di $\sqrt{101}$ riducesi a.....

$$10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} \right), \text{ cioè, a}$$

(193)

10(1 + 0, 005 - 0,0000125), o sia a 10X 1,0049875,
o sia a 10, 049375, cioè a 10,0499, limitandosi alle
sole diecimillesime.

Questo metodo può applicarsi ad ogni specie di ra-
dici, e di grandezze; se ne darà anche un esempio
su di $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$. Cambiasi dunque una tal grandezza
in $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$, e procedendo come qui sopra scrivesi

$$\frac{1}{5}, \frac{\frac{1}{5}-1}{2}, \frac{\frac{1}{5}-2}{3}, \frac{\frac{1}{5}-3}{4}, \frac{\frac{1}{5}-4}{5}, \text{ ec.}$$

$$\text{o sia } \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{10}, -\frac{19}{25}, \text{ ec.}$$

E ponendo 1 per primo termine, formasi la seguente
seconda serie.....

$$1 - \frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{2}{25} \frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{6}{125} \frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{42}{1250} \frac{x^{20}}{a^{20}} - \frac{798}{31250} \frac{x^{25}}{a^{25}}, \text{ ec.}$$

Moltiplicando il primo termine 1 di questa, pel
primo termine $\frac{1}{5}$ della serie superiore, e per

$-\frac{x^5}{a^5}$, cioè pel secondo termine del binomio diviso

pel primo; ne risulta $-\frac{1}{5} \frac{x^5}{a^5}$ per secondo termine di
tale serie.

Moltiplicando questo pel secondo termine $-\frac{2}{5}$
della serie superiore, e per $-\frac{x^5}{a^5}$, ottienosi $\frac{2x^{10}}{25a^{10}}$ per
terzo termine.

Similmente calcolando i termini seguenti fino al

(194)

sesto, e moltiplicando il tutto pel primo termine a^5
del binomio elevato alla potenza $\frac{1}{5}$, cioè per $a^5 \times \frac{1}{5}$

(96), o sia per a ; si ha la grandezza.....

$$a \left(1 - \frac{x}{5a^5} - \frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{42x^{20}}{1250a^{20}}, \text{ ec. } \right)$$

pel valore approssimante di $\sqrt[5]{a^5 - x^5}$.

159. Relativamente a tali serie, ed a tutte le
altre che possonsi similmente formare deve os-
servarsi, che sempre il maggiore dei due ter-
mini del dato binomio, deve stabilirsi per primo
suo termine; per esempio quì sopra in $\sqrt[5]{(a+b)}$
si è presa a per primo termine, ma sarebbe bi-
sognato di prendere b , se questa fosse stata mag-
gior di a . Perchè quando b è maggior di a , allo-
ra la primiera serie $a^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a} - \frac{1}{8} \frac{b^2}{a^2}, \text{ ec.} \right)$

è ingannatrice, poichè essendo $\frac{b}{a}$ maggior dell'u-
nità, i termini successivi che vengon con-
tinuamente moltiplicati per $\frac{b}{a}$, van sempre
perciò aumentando; in modo che non vi è poi
ragione alcuna di arrestarsi dopo di un certo lor
numero. Ma se in tal caso si stabilisce b per
primo termine, allor si ha la serie.....

$b^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{2} \frac{a}{b} - \frac{1}{8} \frac{a^2}{b^2} , \text{ec.})$, in cui i termini van continuamente decrescendo.

Le serie i cui termini , cominciando dal primo , van continuamente aumentando di valore, diconsi *divergenti* ; ed al contrario chiamansi *convergenti* le altre , i cui termini , cominciando dal primo , van continuamente diminuendo di valore.

160. Si è veduto (141), che ogni frazione algebrica può rappresentarsi sotto forma d'intero, trasportando il denominatore nel numeratore cambiandogli però prima il segno dell'esponente. Or questa osservazione ne somministra il mezzo di ridurre in serie ogni frazione, il cui denominatore sarà composto; lo che riuscirà molto utile in appresso.

Per esempio , se abbiassi $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$; in vece di questa grandezza , si scriverà $a^2 \times (a^2 - x^2)^{-1}$, ed in tal caso si eleverà $a^2 - x^2$ a potenza -1 ; giusta la regola stabilita (128) ; cioè , che da principio si stabilirà la serie $-1, \frac{-1-1}{2}, \frac{-1-2}{3}, \frac{-1-3}{4},$ ec. o sia $-1, -1, -1, -1,$

E si formerà la seguente serie :

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} , \text{ec.}$$

moltiplicando il primo termine 1 di questa pel primo termine -1 della serie superiore, e per $-\frac{x^2}{a^2}$, lo che darà $+\frac{x^2}{a^2}$; moltiplicando questo pel secondo termine -1 della serie superiore, e per $-\frac{x^4}{a^4}$, da cui si avrà $+\frac{x^4}{a^4}$, e così successivamente. Indi il tutto si moltiplicherà pel primo termine a^2 elevato a potenza -1 , cioè (96) per $a^2 \times^{-1}$, o sia per a^{-2} , lo che esibirà.....

$$a^{-2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \text{cc.} \right)$$

pel valore di $(a^2 - x^2)^{-1}$; dunque per avere $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$, devesi soltanto moltiplicare per a^2 ; ma $a^{-2} \times a^2 = a^{2-2} = a^0 = 1$; dunque $a^2 (a^2 - x^2)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$, cc.

Così pure se si vorrà ridurre in serie $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^3}$, una tal grandezza si considererà come $a^2 (a^2 + x^2)^{-3}$.

Parimente in vece di $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$, si scriverà....

$\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, ed in seguito $a^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$, e così in tutti gli altri casi.

161. Si è supposto (149), che la stessa formola che serviva per formar le potenze perfette d'un binomio, poteva ancor servire per formarne le potenze imperfette. Come i principj su dei quali essa poggia, sup-

pongono che l'esponente è un numero intero e positivo; così si potrà dubitare, se possa legittimamente applicarsi ai casi, in cui questo esponente sia intero e negativo, o pur fratto positivo o negativo. Ecco in che modo si può restar persuaso, che la stessa formola può servire in tutti questi casi. Sia in generale $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, essendo $\frac{m}{n}$ positivo, si avrà (131)...

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots \right)$$

Per abbreviare, facciasi uguale a p la somma di tutti i termini di questa serie, eccetto però il primo; cioè facciasi.....

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \dots$$

allor si avrà $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} (1+p)$; ed elevando ciascun membro alla potenza n , si avrà (123)

$$(a+b)^{\frac{mn}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} (1+p)^n, \text{ cioè } (a+b)^m = a^m (1+p)^n; \text{ ma si sa che } (a+b)^m = a^m \cdot \left(1 + m \frac{b}{a} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \dots \right)$$

Se dunque $a^m (1+p)^n$ riducesi a questa grandezza, ciò sarà una prova, che avendo luogo l'ultima equazione, abbiano anche luogo tutte quelle, da cui essa si è dedotta; e quindi che il valore di $(a+b)^{\frac{m}{n}}$

dev'esser come lo esibisce la prima equazione.

Vedasi dunque se $a^n (1+p)^n$ riducesi ad $(a+b)^n$.

$$\text{Ora } (1+p)^n = 1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3 + \text{ec.}$$

$$\frac{n-2}{3} p^3 + \text{ec.}$$

Dunque in questo secondo membro, in vece di p , sostituiscasi il suo valore; ma per non abbracciar molto calcolo tutto in una volta, in questa sostituzione si terga conto solamente dei termini che non oltrepassano la terza potenza; così si avrà

$$p = \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^3}{a^3} - 1 \cdot \frac{m}{n} \frac{m-2}{n} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

$$pp = \frac{m^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2}{n^2} \cdot \frac{m}{n} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

$$p^3 = \frac{m^3}{n^3} \frac{b^3}{a^3};$$

per conseguenza.....

$$1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3, \text{ ec.}$$

diverrà.....

$$1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^3}{a^3} - 1 \cdot \frac{m}{n} \frac{m-2}{n} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

$$+ \frac{m^2}{n^2} \frac{n-1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2}{n^2} \cdot \frac{m}{n} \frac{n-1}{2} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

$$+ \frac{m^3}{n^3} \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$$

Ora $m \cdot \frac{m}{n} - 1 + \frac{m^2}{n} \cdot \frac{n-1}{2}$, ch'è tutto ciò che

moltiplica $\frac{b^2}{a^2}$, riducesi ad $m \left(\frac{m-n}{2n} + \frac{mn-m}{2n} \right)$,

o sia ad $m \cdot \frac{mn-n}{2n}$, o finalmente ad $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

Parimente, $m \cdot \frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2 + \frac{2m^2}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1$.

$\frac{n-1}{2} + \frac{m^3}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$, ch'è tutto ciò che mol-

tiplica $\frac{b^3}{a^3}$, riducesi ad $m \cdot \left(\frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} + \frac{m}{n} \right)$.

$\frac{m-n}{n} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)}{3}$, o sia ad

$m \cdot \left(\frac{(m-n) \cdot (m-2n) + 3m \cdot (m-n) \cdot (n-1) + m^2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2n \times 3n} \right)$,

o pur (facendo le indicate operazioni, e le riduzioni),

ad $m \cdot \left(\frac{m^2 - 3m + 2}{2 \times 3} \right)$, che è lo stesso di $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

$\frac{m-2}{3}$; dunque la grandezza $1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2}$.

$p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^2$, ec. riducesi ad $1 + \frac{mb}{a} +$

$m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}$

E se in vece di arrestarsi ai termini che non sorpassano il cubo , si volesse seguitare più a lungo , si troverà similmente che gli altri seguenti termini di questa serie sono $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{b^4}{a^4}$, $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \frac{b^5}{a^5}$, ec.

$$\frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \frac{b^5}{a^5} , \text{ ec.}$$

$$\text{Dunque } a^m (1 + np + n \cdot \frac{n-1}{2} p^2 + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} p^3 + \text{ec.}) \text{ riducesi ad } a^m (1 + \frac{mb}{a} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.}).$$

Sicchè è vera l'equazione $(a+b)^n = a^n (1+p)^n$; per cui anche è vera l'equazione $(a+b)^{\frac{n}{2}} = a^{\frac{n}{2}} (1+p)^{\frac{n}{2}}$, dalla quale quella è stata dedotta , o sia (ciò che val lo stesso) , è vera pure l'equazione $(a+b)^{\frac{n}{2}} = a^{\frac{n}{2}} \times (1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b^3}{a^3} + \text{ec.})$. Dunque la formola atta ad elevare ad una potenza di esponente intero positivo , può ancor servire ad elevare ad una potenza di esponente fratto positivo.

Per dimostrare che la stessa formola può essere impiegata anche nel caso dell'esponente negativo , bisogna rimarcare che se si rappresenta per T la totalità dei termini che si avrebbero sviluppando $(a+b)^{\frac{-n}{2}}$ secondo la stessa regola (151) , si avrà $(a+b)^{\frac{-n}{2}}$

$$= T, \text{ cioè } \frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}} = T \text{ (142); e perciò } 1 = T$$

$\times (a+b)^{\frac{m}{n}}$, bisogna dunque dimostrare, che se la somma T dei termini che darà $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ (trattata secondo la regola stabilita (151), si moltiplica pel valore di $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, il prodotto si ridurrà all'unità. Ora $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ seguendo una tale regola darebbe $a^{\frac{m}{n}} \times$
 $(1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} - 1 \frac{b^3}{a^3} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^4}{a^4} - 1 \frac{b^5}{a^5} + 2 \frac{b^5}{a^5}, \text{ ec.}$

Ed $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ darà.....
 $a^{\frac{m}{n}} (1 + \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} - 1 \frac{b^3}{a^3} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^4}{a^4} - 1 \frac{b^5}{a^5} + 2 \frac{b^5}{a^5}, \text{ ec.}$

Moltiplicando queste due grandezze l'una per l'altra, e non oltrepassando il cubo di $\frac{b}{a}$, si avrà

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} (1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} + 1 \frac{b^3}{a^3} - \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^4}{a^4} + 1 \frac{b^5}{a^5} + 2 \frac{b^5}{a^5}, \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m}{n} \frac{b}{a} - \frac{m^2}{n^2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m^3}{n^3} \frac{b^3}{a^3} + 1 \frac{b^3}{a^3}, \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^2}{a^2} - 1 \frac{b^3}{a^3} - \frac{m^2}{n^2} \frac{b^4}{a^4} - 1 \frac{b^5}{a^5}, \text{ ec.}$$

$$+ \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{m}{n} \frac{b^4}{a^4} - 1 \frac{b^5}{a^5} + 2 \frac{b^5}{a^5}, \text{ ec.}$$

Or se prendesi la pena di fare il calcolo, si vedrà che la somma delle grandezze che moltiplicano $\frac{b}{a}$, di quelle che moltiplicano $\frac{b^2}{a^2}$, delle altre che moltiplicano $\frac{b^3}{a^3}$, riducesi a zero; e lo stesso sarà delle seguenti potenze, se spingesi il calcolo al di là di $\frac{b^3}{a^3}$;

dunque un tal prodotto riducesi ad $a^{\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} \times 1$, o sia ad $a^0 \times 1$, o ad 1×1 , cioè ad 1. Dunque la formula è applicabile a tutti i casi.

Delle equazioni a due incognite, quando esse sorpassano il primo grado.

162. Una equazione ad una sola incognita allor dicesi del grado terzo, quarto, quinto, ec., quando la più alta potenza dell'incognita è rispettivamente la terza, la quarta, la quinta, ec.; ma oltre di questa potenza, una equazione può contenere ancora tutte le potenze inferiori; così $x^5 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^5 + 6x^4 - 9x = 7$, son tutte equazioni del terzo grado.

Una equazione a due o a più incognite dicesi che passa il primo grado, non solo quando una di queste passa il primo grado, ma pure quando alcune di tali incognite son moltiplicate tra loro; ed in generale, il grado vien valutato

dalla maggior somma che si ha degli esponenti delle incognite in uno stesso termine: l'equazione $x^3 + y^3 = a^3b$ è del terzo grado; ed anche del terzo grado è l'altra $bx^3 + x^2y + ay^3 = ab^3$, perchè 3 è la somma degli esponenti di x ed y nel termine x^2y , mentre negli altri termini gli esponenti son minori.

163. Per risolvere i problemi che conducono ad equazioni superiori al primo grado, ed a più incognite, bisogna, come si è oprato in quelle del primo grado, ridurre tali equazioni ad una sola che contenga una sola incognita.

Se si hanno due equazioni e due incognite, ed in una di queste equazioni, una delle incognite non sorpassa il primo grado; si prende il valor di tale incognita, come se tutto il resto fosse cognito; si sostituisce tal valore nell'altra equazione, e si ha una equazione che contiene una sola incognita.

Per esempio, se propongasi questo problema, trovar due numeri la cui somma sia 12, e'l prodotto 35. Esprimendo questi due numeri per x ed y , si avrà $x + y = 12$, ed $xy = 35$.

Dalla prima equazione risulta $x = 12 - y$; sostituendo questo valor di x nella seconda, si ha $(12 - y)y = 35$, equazione di secondo grado, che risolta secondo le regole date (99, e seguenti), darà $y = 6 \pm 1$, cioè $y = 7$, o pure

$y = 5$; e poichè $x = 12 - y$, si avrà $x = 5$, o pure $x = 7$; cioè, che i due chiesti numeri sono 5 e 7, o 7 e 5.

Parimente, se si abbiano le equazioni $x + 3y = 6$, ed $x^2 + y^2 = 12$, dalla prima si rileverà $x = 6 - 3y$; sostituendo tal valore di x nella seconda, si avrà $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; eseguendo l'indicata operazione, si ha $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$; o sia, passando tutto in un membro, e riducendo, $10y^2 - 36y + 24 = 0$; equazione del secondo grado, che può risolversi colle regole date (99 e seguenti).

Prendansi per terzo esempio le due equazioni $xy + y^2 = 5$, ed $x^2 + x^2y = y^2 + 7$. La prima ne dà $x = \frac{5 - y^2}{y}$; sostituendo nella seconda, si ha $\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 + \left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 y = y^2 + 7$, o sia $\frac{(5 - y^2)^2}{y^2} + \frac{(5 - y^2)^2 y}{y^2} = y^2 + 7$. In questo caso, per togliere i fratti basta di moltiplicare il secondo termine per y , e'l secondo membro per y^2 , lo che equivale a moltiplicar tutta l'equazione per y^2 , e si ha $(5 - y^2)^2 + (5 - y^2)^2 y = y^4 + 7y^2$. Eseguendo le indicate operazioni, risulta $125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6 + 25y^4 - 10y^5 + y^6 = y^4 + 7y^2$; passando tutto nel primo membro, e riducendo, ed indi cambiando i segni di tutti i termini; si ha y^6

$-5y^4 + 7y^4 + 50y^4 - 125 = 0$, equazione che contiene soltanto y , ma che però è del quinto grado.

164. In occasione di questo esempio, si farà rimarcare, che quando alcuni denominatori dell'equazione hanno dei comuni fattori, possono far disparire questi denominatori in un modo più facile di quello della regola generale, esaminando per qual grandezza bisognerà moltiplicarli, acciò divenissero uguali. Questa osservazione è analoga a quella che si è fatta in proposito dei fratti (48). Per esempio, se ab-

biasi l'equazione $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, essa si cam-

bierà in $\frac{c^2 x + bdx}{abc} = e$, col moltiplicare i due

termini del primo fratto per c , e gli altri del secondo per b ; in tal caso togliendo il denominatore, si avrà $c^2 x + b d x = abce$.

165. *Se in una delle equazioni, una delle due incognite non sorpassa il secondo grado: si prende in questa il valore del quadrato dell'incognita la meno elevata, e si sostituisce nell'altra, in vece del quadrato della stessa incognita, e delle sue potenze; e la sostituzione si continua finchè tale incognita giunge al primo grado. Allora si rileva da quest'ultima equazione il valore di questa stessa incognita, e si sostituisce nell'altra.*

Per esempio, se si avrebbe $x^2 + 3y^2 = 6x$, e $2x^2 - 3y^2 = 8$, si prenderebbe nella prima il valor di x ch'è $x = 6x - 3y^2$; e sostituendolo nella seconda, badando che x^2 è lo stesso di $x \times x$, si avrebbe $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, che riducesi a $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; come in questa vi è ancora x^2 , così vi si sostituisce di nuovo, come quì sopra, lo stesso valor di x , e si ha $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$, equazione in cui x è soltanto al primo grado.

Se ne ritrae il valor di x , e si ha $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; si sostituisce questo valore nella prima equazione $x^2 + 3y^2 = 6x$: ne risulta...
 $\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^2 + 3y^2 = 6\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)$, o sia
 $\frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}$, o sia (164)
 $\frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{(234y^2 + 48)(72 - 6y^2)}{(72 - 6y^2)^2}$,
 o pur finalmente, togliendo il comun denominatore, $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2) = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$, equazione in cui non deve farsi altro, che alcune moltiplicazioni, e le ordinarie riduzioni.

166. Quando le equazioni sono di gradi più elevati, seguendo un metodo analogo a quello ora espo-

sto, si può anche giungere all'equazione che contiene una sola incognita; ma allora è molto difficile di evitare un inconveniente che accompagna un tal metodo: quest' inconveniente consiste in far montare l'equazione ad un grado più elevato di quello che essa effettivamente dev' essere. E questa è la ragione per cui or si va ad esporre un altro metodo che è esente dalla detta difficoltà.

167. Qualunque equazione a due incognite può sempre mettersi sotto di questa forma $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \dots + T = 0$; dinotandosi per m il grado al quale è elevata la x . In fatti, si può sempre fare una totalità di differenti termini composti dalla y e dalle grandezze cognite che moltiplicano ciascuna potenza della x , e rappresentare questa totalità per una sola lettera; per esempio, nell'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, che può generalmente rappresentare tutte le equazioni del secondo grado a due incognite (perchè in essa oltre di queste potenze di tali incognite, non possono esservene altre); i suoi termini possono riunire in questa maniera $ax^2 + (d + by)x + cy^2 + ey + f = 0$, e per abbreviare, scriverli nel seguente modo; $Ax^2 + Bx + C = 0$, però, dopo che di questa equazione si è fatto quell'uso, pel quale le si è data questa forma, bisogna in vece delle lettere A, B, C rimettervi quel che esse rappresentano. Ciò posto, sieno dunque.....

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \dots T = 0$$

$$\text{ed } A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \dots T' = 0$$

Le due proposte equazioni, dalle quali trattasi di eliminare la x . In primo luogo suppongansi esse dello stesso grado, perchè in appresso poi si vedrà ciò che bisogna fare quando sieno di gradi diversi.

Si moltiplicherà la prima per A' , la seconda per A , e dal primo prodotto si sottrarrà il secondo, lo che darà una equazione del grado $m - 1$.

Si moltiplicherà la prima per $A'x + B'$, la seconda per $Ax + B$, e dal primo prodotto si sottrarrà il secondo, lo che darà una seconda equazione del grado $m - 1$.

Si moltiplicherà la prima per $A'x^2 + B'x + C'$, la seconda per $Ax^2 + Bx + C$, e si sottrarrà dal primo prodotto il secondo, e ne risulterà una terza equazione del grado $m - 1$.

Si continuerà della stessa maniera, finchè il moltiplicatore sia divenuto del grado $m - 1$.

Ciò posto, si avranno m equazioni, ciascuna del grado $m - 1$. In ognuna delle quali, le differenti potenze x^{m-1} , x^{m-2} , x^{m-3} , ec. si considereranno come se fossero altrettante incognite elevate al primo grado. Per mezzo delle prime $m - 1$ equazioni, o in generale per mezzo di un numero $m - 1$ di tali equazioni, si determineranno (85) i valori di queste incognite, che si sostituiranno nell'ultima equazione. Questa operazione darà un'equazione senza x , in cui sostituendo per A , B , C , ec. A' , B' , C' , ec. le grandezze che son rappresentate da tali lettere, e che da altra parte posson contenere qualsivogliano potenze della y , si avrà l'equazione in y .

Per esempio, se abbiani le due equazioni

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$A'x^2 + B'x + C' = 0$$

Che posson rappresentare tutte le equazioni a due

incognite , in cui una sola delle due incognite non sorpassa il secondo grado ; moltiplicando la prima per A' , la seconda per A , sottraendo dal primo il secondo prodotto , e riducendo , si avrà $(A'B - AB')x + A'C - AC' = 0$.

Moltiplicando la prima equazione per $A'x + B'$, la seconda per $Ax + B$, dal primo prodotto sottraendo il secondo , e riducendo , si avrà $(A'C - AC')x + B'C - BC' = 0$.

Dunque prendendo nella prima il valor di x , che è $x = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}$, e sostituendolo nella seconda, si

avrà $(A'C - AC') \times \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'} + B'C - BC' = 0$. O pure [perchè $AC' - A'C$ è lo stesso di $-(A'C - AC')$], perciò si avrà $\frac{-(A'C - AC')^2}{A'B - AB'} + B'C - BC' = 0$, o sia finalmente $-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$.

Se abbiansi le due equazioni.....

$$Ax^2 + Bx + Cx + D = 0$$

$$A'x^2 + B'x + C'x + D' = 0.$$

Moltiplicando la prima per A' , la seconda per A , sottraendo , e riducendo; si avrà $(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + A'D - AD' = 0$.

Moltiplicando la prima per $A'x + B'$, la seconda per $Ax + B$, sottraendo e riducendo , si avrà $(A'C - AC')x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')x + B'D - BD' = 0$.

Finalmente moltiplicando la prima per $A'x^2 + B'x + C'$, la seconda per $Ax^2 + Bx + C$, sottraendo e

riducendo, si avrà $(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + CD - CD' = 0$.

Or considerando x^2 ed x come due incognite al primo grado, non deve farsi altro, che determinare i lor valori per mezzo di due qualunque di queste tre equazioni del secondo grado, ed indi sostituir tali valori nella terza.

168. Se la x non sia allo stesso grado in ambe le proposte equazioni; allor si opererà come segue.

Sieno m ed n i due esponenti, dei quali m il maggiore. Si moltiplicherà l'equazione del grado n per x^{m-n} , ciò che le renderà ambedue dello stesso grado. Allora si opererà come nel caso precedente, continuando le moltiplicazioni, finchè il moltiplicatore sia divenuto del grado $n - 1$, lo che darà n equazioni del grado $m - 1$.

In ciascuna di queste, ed in tutte le potenze superiori ad x^n , si sostituirà il valor di x^n rilevato dall'equazione del grado n , e si continuerà la sostituzione, finchè la più alta rimanente potenza sia x^{n-1} , qual cosa sarà sempre possibile; allor si avranno n equazioni ciascuna del grado $n - 1$. Impiegando $n - 1$ di tali equazioni, si determineranno i valori di x^{n-1} , x^{n-2} , x^{n-3} , ec. considerate come altrettante incognite al primo grado, e si sostituiranno nell'ultima.

Questo metodo è generale. Esso può esser semplificato in molti casi, che però non saranno narrati partitamente. Si osserverà soltanto che nelle successive moltiplicazioni per A' ed A , $A'x + B'$ ed $Ax + B$, cc, si può far di meno di moltiplicare il primo, li due primi, ec. termini delle due proposte equazioni, ed in generale altrettanti dei primi termini dei termini

che costituiscono il moltiplicatore, perchè il prodotto che da essi si otterrà, si annienterà colla sottrazione.

169. Se si determinano i valori delle differenti potenze della x in seguito delle regole già stabilite per le equazioni del primo grado a più incognite, l'equazione finale in y giammai non monterà ad un grado più elevato di mn , supponendo che il massimo esponente di x ed y sia m in una equazione, ed n nell'altra. Ma se gli esponenti di x ed y son disuguali in ciascuna equazione, in modo che quelli di x essendo sempre m ed n sì nella prima, che nella seconda, quelli di y sieno $m + p$ ed $n + q$; l'equazione finale in y non mai sorpasserà il grado $mn + mq + np$. Per la dimostrazione di questa verità veggansi le *Memorie dell'Accademia delle scienze, per l'anno 1764*. Veggansi anche le *Memorie dell'Accademia di Berlino*, anno 1748; e l'*Analisi delle linee curve* di Cramer.

Delle equazioni a più di due incognite, quando esse sorpassano il secondo grado.

170. Quando si hanno più di due equazioni, e più di due incognite, per esempio tre, può procedersi della stessa maniera, eliminando prima una delle due incognite per mezzo della prima e della seconda equazione, che si tratteranno secondo il metodo precedente; ed eliminando ancora la stessa incognita per mezzo della prima e della terza, o pur della seconda e della terza. Così avransi due equazioni che non conterranno più di due incognite, le quali tratteransi ancora secondo il metodo precedente.

Ma però non devesi affatto dissimulare, che un tal metodo il qual conduce sicuramente all'intento, quan-

do non si hanno più di due equazioni e due incognite; pur nondimeno cade nell'inconveniente di condurre ad equazioni più elevate di quel che bisogna, quando il numero delle proposte equazioni è maggior di due.

Il metodo di evitare un tale inconveniente, consiste in eliminare, combinando le equazioni non già a due a due, ma a tre a tre, quando ne vengon date tre; a quattro a quattro, quando ne son date quattro, ec.. Ma questo modo di combinarle esige ancora una particolare scelta, la qual se si volesse minutamente esporre, porterebbe troppo lungi. Essa si troverà nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze per l'anno 1764*. Ivi troveransi ancora varie ricerche su dei gradi, cui montar deve l'equazion finale risultante dell'eliminazione di più incognite. Del resto, benchè questi citati metodi abbassano considerabilmente il grado al qual condurrebbero quelli finora esposti, e tanto quanto è possibile eliminando una sola incognita per volta; pure può credersi intanto che esso possa ancora più diminuirsi: ma probabilmente non vi si perverrà, che quando si sarà trovato un metodo per eliminare le incognite, fuorchè una, tutte in una volta; qual cosa a me non è noto che possa ancora generalmente praticarsi su di altre equazioni, che su di quelle del primo grado.

'Delle equazioni a due termini.

171. Chiamansi *Equazioni a due termini*, quelle che contengono una sola potenza dell'

incognita, perchè esse posson sempre ridursi a due termini. Per esempio, $ax^r + bx^r = a^3b^3 - a^3b^3$ è un'equazione a due termini, perchè mettendola sotto di questa forma $(a + b)x^r = a^3b^3 - a^3b^3$, vedesi che essendo a e b grandezze cognite, si potrà sempre ridurre $a + b$ ad una sola grandezza, che chiamisi p , e parimente $a^3b^3 - a^3b^3$ si potrà ridurre ad una sola grandezza, che chiamisi q , e così una tale equazione vien rappresentata da quest'altra $px^r = q$. Queste equazioni risolvonsi molto agevolmente, poichè è chiaro che dopo di aver rimasto in un membro la sola potenza dell'incognita, colle stesse regole praticate nelle altre equazioni, devesi soltanto estrarre da ciascun membro la radice indicata dall'esponente dell'incognita. Per esempio, la suddetta equazione $px^r = q$, diverrà $x^r = \frac{q}{p}$, ed estraendo la radice quinta, si

avrà $x = \sqrt[r]{\frac{q}{p}}$.

172. Quando l'esponente è impari, si ha un sol valore reale. Per esempio, se abbiassi questa equazione $x^5 = 1024$, si avrà $x = \sqrt[5]{1024} = 4$. Ora è chiaro che un sol numero reale vi è, che elevato a quinta potenza possa produrre 1024.

Se il secondo membro di un'equazione di grado impari avesse il segno —, il valor della

x anche avrebbe un tal segno; perchè il — moltiplicato per — un impari numero di volte, dà anche — al prodotto; ma quando l'equazione è di grado pari, allor l'incognita tien due valori, l' un positivo, negativo l' altro, i quali esser possono o ambidue reali, o ambidue immaginarij. Quest' ultimo caso si avvera, se il di lei secondo membro ha il segno —. Se abbiassi l'equazione $x^4 = 625$, se ne ritrarrà $x = \sqrt[4]{625} = 5$; ma poichè — moltiplicato per — un numero pari di volte, dà lo stesso che + moltiplicato per +, pertiò — 5 può soddisfare ugualmente che + 5; così bisogna scrivere $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$, come si è appunto praticato nelle equazioni del secondo grado. Al contrario, se siasi avuto $x^4 = -625$, se ne sarebbe rilevato $x = \pm \sqrt[4]{-625}$; ma questi due valori sono immaginarij, perchè non evvi alcun numero positivo o negativo, che moltiplicato per se medesimo un pari numero di volte, possa produrre una grandezza negativa. Si applichino ora queste equazioni ad un problema. Suppongasi di voler trovare due medie proporzionali tra 5 e 625. Chiamando x ed y tali medie, si avrà $5:x::x:y$; $x:y::y:625$, da cui si rilevano queste due proporzioni.

$$5:x::x:y$$

$$\text{ed } x:y::y:625.$$

E pareggiando i prodotti delle estreme a quelli delle medie, si hanno quest' altre due equazioni $5y = x^2$, e $625x = y^2$. Or dalla prima si ha $y = \frac{x^2}{5}$, qual valore di y sostituito nella secon-

da, ne risulta $625x = \frac{x^4}{25}$: e dividendo per x e moltiplicando per 25, si ha $x^3 = 15625$, e finalmente $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; dunque $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

Delle equazioni che possono risolvere come quelle del secondo grado.

175. Tali equazioni debbon contenere due sole differenti potenze della x , delle quali però una abbia l' esponente doppio di quello dell' altra. Per esempio $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, sono ambedue di tal natura. Queste equazioni si risolvono come quelle del secondo grado: in fatti, dopo di aver resa positiva la maggior potenza dell' incognita, se in caso no' l' sia, e dopo di averla liberata dalle grandezze che la moltiplicano o dividono; aggiungesi a ciascun membro il quadrato della metà del coefficiente della minor potenza, ciò che rende il primo membro.

un quadrato perfetto. Indi estraesi la radice quadrata da ciascun membro, dando a quella del secondo il doppio segno $\pm$. L'equazione si è ridotta ad una di quelle a due termini.

Per esempio, se cercansi due numeri, dei quali la somma dei cubi fosse 35, e 6 il prodotto: si avrebbero queste due equazioni $x^3 + y^3 = 35$ ed $xy = 6$. Da quest'ultima si avrà $y = \frac{6}{x}$, qual valore sostituito nella prima, risulta $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; togliendo il denominatore, e trasponendo, si ha $x^6 - 35x^3 = -216$. Prendesi dunque la metà di 35 che è $\frac{35}{2}$, il cui quadrato aggiungesi a ciascun membro, e si ha $x^6 - 35x^3 + \left(\frac{35}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216$; estraendo la radice quadrata, risulta $x^3 - \frac{35}{2} = \pm \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}$; trasponendo, $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}$, e finalmente estraendo la radice cubica, $x = \sqrt[3]{\left[\frac{35}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]}\right]}$; ora $\left(\frac{35}{2}\right)^2 = \frac{1225}{4}$, e $\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216 = \frac{1225 - 864}{4} = \frac{361}{4}$, dunque $\sqrt{\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right]} = \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$.

Sicchè $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2}\right)}$, da cui si hanno i seguenti due valori di x , cioè $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35 + 19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, ed $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35 - 19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; e poichè si è trovato $y = \frac{6}{x}$, perciò si avrà $y = 2$, ed $y = 3$.

Quando il massimo esponente è 4, o pure un multiplice di questo, allora possonsi avere fino a quattro radici reali.

Della Composizione delle Equazioni.

174. Di sopra si è osservato che le equazioni a due termini offrono un sol valore reale dell'incognita, se son di grado impari, e due se di grado pari: oltre di questi ne offrono molti altri immaginarj, i quali non sono meno utili, come si vedrà quando risolveransi le equazioni, e di più. In generale *una qualunque equazione offre sempre tanti valori della sua incognita, quante sono le unità che trovansi nel massimo esponente di tale incognita.* Di questi valori, che chiamansi anche *radici* dell'equazione, gli uni possono esser positivi, negativi gli altri; gli uni reali, immaginarj gli altri.

175. Per rendere evidenti tutte queste verità, bisogna osservare, che quando in una equazione si son fatti passare tutti i termini in un sol membro, e che sonosi ordinate tutte le potenze di x , o dell'incognita; un tal membro si può considerar sempre come

il prodotto della moltiplicazione di più fattori binomj semplici che abbian tutti x per comun termine.

Per esempio , quando l'equazione $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$, per la trasposizione dei suoi termini ponesi sotto la seguente forma $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, si capisce che $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, può benissimo risultare dalla moltiplicazione di tre fattori binomj semplici $x - a$, $x - b$, $x - c$.

In fatti , se moltiplicansi questi tre fattori, si avrà

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 + abx - abc &= 0 \\ - bx^2 + acx & \\ - cx^2 + bcx & \end{aligned}$$

Ora affinchè queste due equazioni sieno le stesse , debbonsi trovar tali valori di a , b , c , che $a + b + c = 8$, $ab + ac + bc = 7$, ed $abc = 9$.

Per determinare ciascuna di tali grandezze , per esempio a , dopo di aver moltiplicata la prima equazione per a^2 , e la seconda per a , ciò che ne dà $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^3$, $a^3b + a^3c + abc = 7a$, ed $abc = 9$; bisogna sottrarre la seconda dalla prima , ed al residuo aggiungervi la terza , e si ha $a^3 = 8a^3 - 7a + 9$, e pur trasponendo , $a^3 - 8a^3 + 7a - 9 = 0$.

Similmente si troverà , che l'equazione che darà b è $b^3 - 8b^3 + 7b - 9 = 0$, e che l'altra che darà c , è $c^3 - 8c^3 + 7c - 9 = 0$. Qual cosa ne somministra le seguenti proposizioni.

176. 1.^a Poichè l'equazione che deve dare a è la stessa di quella che deve dare b , e dell'altra che dar deve c ; e che di più , facilmente si vede che i valori di a , b , c non possono essere uguali , bisogna dunque che qualunque di queste tre equazioni

possa dare i valori di a , b , e c ; dunque ciascuna di queste tre equazioni aver deve tre radici, delle quali una sarà il valor di a , l'altra il valor di b , e la terza il valor di c .

2.^a Ciascuna di queste equazioni è la stessa della medesima proposta $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, colla sola differenza, che a , o b , o c , è cambiata in x . Dunque questa aver deve tre radici, ed esse deggiono essere i tre valori di a , b , e c .

Dunque le grandezze che bisogna mettere per a , b , e c nei binomj $x - a$, $x - b$, $x - c$, per produrre l'equazione $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, per mezzo della moltiplicazione di questi fattori semplici, sono le stesse radici di tale equazione.

177. Se i coefficienti delle differenti potenze di x sieno altri numeri diversi da 8, 7, ec., e se l'equazione in vece di essere del terzo grado, sia del quarto, quinto, ec., le già dedotte conseguenze saranno ancora della stessa natura. Così, se generalmente abbiasi $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, in cui p , q , r , s sieno numeri cogniti; si potrà similmente considerar questa equazione, come risultante dal prodotto di quattro fattori semplici $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$. In fatti, questi quattro fattori moltiplicati tra loro, esibiscono la seguente equazione.

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd &= 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx & \\ - cx^2 + adx - acdx & \\ - dx^2 + bcdx & \\ + bdx^2 & \\ + cdx^2 & \end{aligned}$$

Ora affinchè tal grandezza sia la stessa che $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, bisogna che a, b, c, d sien tali, che abbiasi $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, ed $abcd = s$.

Ciò premesso, se si moltiplichi la prima di queste equazioni per a^3 , la seconda per a^2 , e la terza per a , e dalla somma della prima e della terza, tolgasi la somma della seconda e della quarta; si avrà $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra - s$, ossia $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$: similmente oprando si troverà che l'equazione in b è $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; che l'equazione in c è $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$; e che l'equazione in d è $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. In questa maniera l'equazione che darà a , deve dunque dare aneor $b, c, e d$; essa dunque aver deve quattro radici, che saranno i valori delle quattro grandezze a, b, c, d . E come ciascuna di queste equazioni è la stessa che l'equazione $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, così le grandezze a, b, c, d che bisogna prendere, scond quest'ultima si ottenga dal prodotto dei quattro fattori semplici $x - a, x - b, x - c, x - d$, son dunque le stesse radici di una tale equazione.

178. Dunque in generale, 1.^a Una equazione di qualunque grado, può sempre considerarsi come risultante dal prodotto di tanti fattori binomj semplici, che han tutti per termine comune la sua incognita; quante sono le unità del massimo esponente di questa. 2.^a I secondi termini di tali binomj, presi però col segno contrario, sono le radici della stessa equazione.

179. Se l'equazione in vece di avere i suoi termini alternativamente positivi e negativi, come si è

supposto nella suddetta $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, abbia i segni disposti in qualunque altra guisa, come nella seguente $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, si dimostrerà nello stesso modo, che essa può sempre rappresentarsi per $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, in cui a, b, c, d sieno le sue radici.

180. Poichè a, b, c, d son le radici dell'equazione $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, che risulta dal prodotto degli indicati fattori, e di più si è veduto che $c + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, ed $abcd = s$; perciò rilevasi che in tale equazione, e così in tutte le altre, 1.^o il coefficiente $-p$ del secondo termine, preso col segno contrario, cioè in questo caso preso col $+$, è uguale alla somma di tutte le sue radici.

2.^o Che il coefficiente q del terzo termine, è uguale alla somma dei prodotti di queste radici, moltiplicate a due a due.

3.^o Che quello del quarto termine, preso col segno contrario, è uguale alla somma dei prodotti delle radici moltiplicate a tre a tre, e così in seguito, e che finalmente l'ultimo termine, preso collo stesso segno se è in luogo dispari, e col segno contrario se è in luogo pari, è il prodotto di tutte le radici.

Ciò è generalmente vero, qualunque sieno i segni dei termini dell'equazione, basta però che prendansi col segno contrario i coefficienti dei termini di numero pari.

181. Da ciò ne segue, che una equazione che non ha secondo termine, tener deve sicuramente delle radici positive, e delle negative, e deve la somma delle une, uguagliar quella delle altre.

Così nell'equazione $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, la somma delle sue tre radici, dev'esser -2 ; la somma dei prodotti di queste moltiplicate a due a due, esser deve -23 ; e $+60$ dev'essere la somma dei lor prodotti moltiplicate a tre a tre, ossia il prodotto di tutte le tre radici. In fatti le sue tre radici sono $+5$, -4 , -3 , come può vedersi sostituendo in essa, in vece di x , ciascuno di questi numeri; poichè ciascuno riduce il primo membro a zero. Ora è evidente, che la somma di questi numeri, o sia $+5 - 4 - 3 = -2$; che la somma dei lor prodotti a due a due, o sia $-20 - 15 + 12 = -23$; e che il prodotto di tutti tre, o sia $5 \times -4 \times -3 = +60$.

Parimente, poichè nell'equazione $x^3 - 19x + 30 = 0$, vi manca il secondo termine, perciò conchiudesi che essa aver deve delle radici positive e delle negative, e che la somma delle une, uguagliar deve quella delle altre; in fatti le sue tre radici sono $+2$, $+3$, e -5 , la cui somma $+2 + 3 - 5 = 0$.

Considerando un'equazione come risultante dal prodotto di più fattori binomj semplici, si rende facilmente ragione del come avvenga, che diversi numeri soddisfanno ad una stessa equazione. Per esempio, se propongasi questo problema: *Trovare un numero tale, che il suo eccesso sopra 5, moltiplicato per la sua somma con 4, e per la sua somma con 3; dia zero per prodotto*: chiamando x un tal numero, si avrà $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5) = 0$, o sia $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$; ora è evidente, che se $x = -4$, o pure $x = -3$, ovvero $x = 5$, risulta nel primo caso, $x + 4 = -4 + 4 = 0$, nel secondo, $x + 3 = -3 + 3 = 0$, e nel terzo, $x - 5 = 5 - 5 = 0$; per cui nel

primo caso, l'indicato prodotto si ridurrà a $x(x+3) \times (x-5)$, o sia a zero; nel secondo, ad $(x+4) \times x(x-5)$, o pure a zero; e nel terzo, ad $(x+4) \times (x+3) \times 0$, cioè anche a zero. Ma il risultato di un tal prodotto è $x^3 + 2x^2 - 23x - 60$, dunque se $x = -4$, o pure $= -3$, ovvero $= 5$; sempre si avvera, che $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$. Onde se vien proposta una equazione come la suddetta $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, si può per valore della sua incognita prendere qualunque degli indicati numeri -4 , -3 , e 5 , perchè ognun di essi riduce ugualmente il primo membro a zero, ed ugualmente vi soddisfa.

182. Qui avrà luogo anche un'altra osservazione che potrà essere utile. Le equazioni $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, tutte han condotto alla stessa equazione, tanto per avere a , quanto per avere b , quanto ec. Di ciò n'è la ragione, che a , b , c , d essendo tutte disposte della stessa maniera in ciascuna equazione, non vi è nessun motivo, che una di esse venga determinata con qualche operazione differente da quelle che determinerebbero le altre; dunque da ciò deve generalmente conchiudersi, che se nella ricerca di più grandezze incognite, s'impieghino per ciascuna di esse gli stessi raziocinj, le medesime operazioni, e le stesse quantità cognite; che tali grandezze saran tutte necessariamente radici di una stessa equazione; e quindi che il problema dipendente da una tal ricerca, conduce ad una equazione composta.

183. Poichè un'equazione può considerarsi come risultante dal prodotto di più fattori semplici, perciò può anche considerarsi come il risultato del prodotto

di più fattori composti; così un'equazione del terzo grado può esser considerata come risultante dal prodotto di un fattore di secondo grado, come $x^2 + ax + b$, per un fattore di primo grado, come $x + c$: in fatti $x^3 + ax^2 + bx + c$, può sempre rappresentare il prodotto di due altri fattori semplici.

Similmente un'equazione del quinto grado, può sempre considerarsi come formata, o dal prodotto di cinque fattori semplici; o di due fattori del secondo grado, e di un fattore del primo; o di un fattore del terzo, e di un fattore del secondo; o finalmente, di un fattore del quarto, e di un fattore del primo.

184. Si è di già veduto più sopra che un'equazione del secondo grado può avere delle radici immaginarie; poichè dunque un'equazione di qualunque grado, può risultare dal prodotto di uno, o di più fattori del secondo grado; perciò essa aver può anche delle radici immaginarie, e queste potranno essere di forma ben differente di quelle del secondo grado.

185. Quando si considera un'equazione come ottenuta dal prodotto di più fattori semplici, si vede che essa può avere m divisori del primo grado, se m dinota il suo grado.

186. Considerando poi un'equazione come formata dal prodotto di fattori del secondo grado, il numero dei divisori del secondo grado che essa può avere, è espresso da $m \cdot \frac{m-1}{2}$, dinotandosi per m il grado della medesima. In fatti, se vi è un numero m di grandezze, si è veduto (148), che esse possono moltiplicare a due a due in $m \cdot \frac{m-1}{2}$ differenti maniere; dunque

se m dinoti un certo numero di fattori semplici, essi moltiplicati a due a due, daranno $m. \frac{m-1}{2}$ differenti prodotti, i quali saranno per conseguenza del secondo grado.

Per esempio l'equazione.

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ - bx^3 + acx^2 - abdx \\ - cx^3 + adx^2 - acdx \\ - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ + bdx^2 \\ + cdx^2 \end{aligned}$$

la quale risulta da $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d)$, può considerarsi formata dal prodotto di due fattori del secondo grado, in questi sei differenti modi, cioè.....

col moltiplicare $(x-a) \times (x-b)$ per $(x-c) \times (x-d)$
 $(x-a) \times (x-c) \dots (x-b) \times (x-d)$
 $(x-a) \times (x-d) \dots (x-b) \times (x-c)$
 $(x-b) \times (x-c) \dots (x-a) \times (x-d)$
 $(x-b) \times (x-d) \dots (x-a) \times (x-c)$
 $(x-c) \times (x-d) \dots (x-a) \times (x-b)$

In questa maniera un'equazione del quarto grado può avere sei differenti divisori del secondo, ed in generale un'equazione del grado m , può avere $m. \frac{m-1}{2}$ differenti divisori del secondo grado.

Dunque da ciò conchiudesi, che se vogliasi sapere

quali valori debbano avere g , ed h , affinchè $x^2 + gx + h$ fosse divisore di una proposta equazione del grado m ; si può esser sicuro che ciascuna delle g , ed h deve determinarsi per mezzo di un' equazione del grado $m \cdot \frac{m-1}{2}$. Poichè $x^2 + gx + h$ è idoneo a rappresentare qualunque degli $m \cdot \frac{m-1}{2}$ divisori del secondo grado dell' enunciata equazione; perciò h deve avere $m \cdot \frac{m-1}{2}$ valori corrispondenti; lo stesso è di g che è la somma di due delle radici della proposta equazione. Dunque, ciascuna di queste grandezze deve essere esibita con una equazione del grado $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

Considerando un' equazione come risultante dal prodotto di fattori del terzo grado, si dimostrerà similmente, che ciascun suo fattore del terzo grado è suscettibile di $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$ differenti valori; in modo che se $x^3 + gx^2 + hx + k$ rappresenti uno di questi fattori, k dovrà esser determinata con una equazione del grado $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$. Son chiare abbastanza le analoghe conseguenze che debbonsi dedurre relativamente ai fattori del quarto, quinto, ec. grado.

187. Da tutto ciò che si è esposto conchiudesi, che quando s'è trovata una delle radici di una proposta equazione, per aver le altre, si può questa dividere per x tolta tal radice, cioè per $x - a$, se chiamasi a essa radice; e la divisione che sarà esatta, darà per quoziente una grandezza uguale a zero, cioè un' altra

equazione in cui x sarà elevata ad un grado di meno che nella proposta ; per cui risolvendo quella equazione, nelle sue radici si otterranno le rimanenti della proposta. Similmente se sappiansi due radici espresse da a e b , dovrà l'equazione dividersi per $(x - a) \times (x - b)$, e così in seguito.

Delle principali Trasformazioni, cui posson soggettersi le Equazioni.

188. Le equazioni possono soggettersi a differenti trasformazioni, di cui convien che si parli, prima di passare al risolvimento di quelle.

189. *Se in un'equazione si cambino i segni dei termini, che contengono potenze impari dell'incognita; le radici positive di tale equazione diverranno negative, e le negative, positive:* in fatti per cambiare i segni delle radici di un'equazione, basta sostituire $-x$ in vece di $+x$; or questa sostituzione non cambia affatto i segni dei termini che contengono potenze pari della x , mentre che, al contrario, cambia i segni di quelli in cui trovansi le sue potenze impari.

190. *Per trasformare un'equazione che abbia l'unità per coefficiente del primo termine, e che contenga dei fratti nei successivi termini, in un'altra che più non li contenga, e che nello stesso tempo non resti alterato il coefficiente del suo primo termine;* in vece della sua incognita, bisogna sostituirla un'altra divisa pel prodotto dei denominatori di tutti quelli fratti, ed indi moltiplicar tutta l'equazione che così risulta, pel denominatore del suo primo termine.

★

Per esempio, se si ha l'equazione $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$, si pone $x = \frac{y}{mnp}$; e fatte in essa le debite sostituzioni, si ha $\frac{y^3}{m^3 n^3 p^3} + \frac{ay^2}{m^3 n^3 p^3} + \frac{cy}{mn^2 p} + \frac{d}{p} = 0$, la qual moltiplicata per $m^3 n^3 p^3$, ne dà $y^3 + \frac{am^3 n^3 p^3 y^2}{m^3 n^3 p^3} + \frac{cm^3 n^3 p^3 y}{mn^2 p} + \frac{dm^3 n^3 p^3}{p} = 0$, in cui facendo le indicate divisioni, si ha $y^3 + anpy^2 + cm^2 np^2 y + dm^3 n^3 p^2 = 0$.

191. Se m , n , e p fossero uguali, basterà di porre $x = \frac{y}{m}$. Donde segue che per trasformare un'equazione in cui tutti i coefficienti sieno interi, e di cui quello del primo termine sia diverso dall'unità, in un'altra che abbia l'unità per coefficiente del primo termine, restando interi anche tutti gli altri coefficienti; bisogna stabilire $x = \frac{y}{m}$, dinotandosi per m il coefficiente del primo termine. In fatti, se siavi l'equazione $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dividendola per m , si ha $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{bx}{m} + \frac{c}{m} = 0$, in cui tutti i denominatori sono uguali, e'l coefficiente del primo termine è uguale all'unità; sicchè stabilendo $x = \frac{y}{m}$, si ha $\frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{m^3} + \frac{by}{m^2} + \frac{c}{m} = 0$, la qual moltiplicata per m^3 , risulta $y^3 + ay^2 + bmy + cm^3 = 0$, che ha l'unità per coefficiente del primo termine, mentre che sono interi tutti i coefficienti degli altri termini.

192. Per trasformare un' equazione che ha il secondo termine, in un' altra che più non l'abbia; bisogna supporre la sua incognita, uguale ad un' altra novella incognita, da cui si sottragga il quoto del coefficiente del secondo termine di essa, diviso per l'esponente del primo.

In fatti, una tale equazione generalmente si rappresenti per $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \dots + k = 0$, e suppongasi $x = y + s$; si avranno due equazioni e tre incognite, per cui una di queste si potrà determinare con qualunque condizione si vorrà.

Or se nella proposta, in vece di x e delle sue potenze, sostituiscasi $y + s$ e le sue corrispondenti potenze, si avrà (149) la seguente serie di termini. . .

$$y^m + msy^{m-1} + \frac{m.m-1}{2} s^2 y^{m-2} \text{ ec.} \dots + k = 0$$

$$+ ay^{m-1} + (m-1)asy^{m-2} \text{ ec.}$$

$$+ \quad \quad \quad by^{m-2} \text{ ec.}$$

Se dunque riguardasi y come incognita, è chiaro che quest' equazione sarà senza secondo termine, se il coefficiente $ms + a$ di questo sia uguale a zero; ma se $ms + a = 0$, risulta $s = -\frac{a}{m} = -\frac{a}{m}$, dunque una tale equazione è senza secondo termine, se $s = -\frac{a}{m}$. Ma la stessa equazione si è ottenuta supponendo $x = y + s$, sicchè dando ad s il valore $-\frac{a}{m}$ che si è veduto competerle, affinchè l' equazione in y non abbia secondo termine; cioè supponendo $x = y - \frac{a}{m}$, ossia ad un'al-

tra incognita da cui vien tolto il fratto che ha per numeratore il coefficiente del secondo termine della proposta, e per denominatore l'esponente del primo, si ha la proposta in x , trasformata nell'altra in y effettivamente priva del secondo termine; con che resta dimostrata la regola esposta più sopra. La supposizione

di $s = -\frac{a}{m}$ è nelle regole, perchè di già si è veduto, che ad una delle tre incognite può darsi quel valore che stimasi più a proposito.

Per esempio, per togliere il secondo termine dall'equazione $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$; si pone $x = y - \frac{6}{3}$, cioè $x = y - 2$. E sostituendo si avrà l'altra equazione

$$\begin{aligned} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 &= 0 \\ + 6y^2 - 24y + 24 & \\ - 3y + 6 & \\ + 4 & \end{aligned}$$

la qual riducesi ad $y^3 - 15y + 26 = 0$, che è totalmente priva del secondo termine.

Della risoluzione delle equazioni composte.

193. In tutto ciò che si sarà per dire, si supporrà che si sien fatti passare in un sol membro, tutti i termini dell'equazione.

Si è di già detto (54) cosa mai devesi intendere per quest'espressione *risolvere un'equazione*; ma qui bi-

sogna fissare più particolarmente ciò che s' intende per *risoluzione generale di un' equazione*.

Risolvere generalmente un' equazione di qualunque grado, come questa $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} \dots + k = 0$, significa trovar tanti valori per l' incognita , quante sono le unità che si contengono nel massimo esponente di essa , e ciascun dei quali sia espresso colle lettere p, q , ec. k combinate tra loro in qualunque si sia maniera , tale per altro , che ciascun di questi valori sostituito nell' equazione in vece di x , riduca il primo membro a zero , indipendentemente da ogni valor particolare di p, q , ec.

Per esempio , la regola stabilita (100) per le equazioni del secondo grado , le risolve generalmente. In fatti , $x^2 + px + q = 0$, può rappresentare ogni equazione del secondo grado , poichè p , e q possono dinotare qualunque numero positivo o negativo; or tale equazione risolta secondo la stessa regola , offre i seguenti due valori di x , cioè $x = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)}$. Ora nell' equazione $x^2 + px + q = 0$, in vece dell' incognita x , sostituiscasi uno degli anzidetti suoi valori , per esempio , $-\frac{1}{2} p + \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)}$; si avrà $\left(-\frac{1}{2} p + \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)}\right)^2 + p\left(-\frac{1}{2} p + \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)}\right) + q = 0$; che riducesi ad $\frac{1}{4} p^2 - p \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)} + \frac{1}{4} p^2 - q - \frac{1}{2} p^2 + p \sqrt{\left(\frac{1}{4} p^2 - q\right)} - q = 0$, in cui eseguendo tutte le ridazio-

ni, si ha $0 = 0$. Lo stesso avverrà, se sostituisca-

$$-\frac{1}{2}p - \sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2 - q\right)}.$$

In un'equazione questa generale espressione dei va-
 lori di x , è tanto più difficile ad ottenersi, quanto
 più elevato è il grado di tale equazione; lo che si ca-
 pisce facilmente se fansi le seguenti riflessioni.

Qualunque possa essere la forma dei valori dell'in-
 cognita, in una equazione di qualsivoglia grado; è certo
 che la generale risoluzione d'una equazione di un gra-
 do determinato, contener deve la risoluzione delle ge-
 nerali equazioni di tutti i gradi inferiori.

In fatti, la generale risoluzione di un'equazione del
 quinto grado, per esempio, come questa $x^5 + px^4 +$
 $qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$, deve dare cinque valori della
 x , ciascun dei quali deve contener necessariamente tut-
 te le lettere p, q, r, s, t . Or quando $t=0$, quest'equa-
 zione si riduce ad $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx = 0$, la qua-
 le essendo il prodotto di questi due fattori $x^4 + px^3 +$
 $qx^2 + rx + s$, ed x , esibisce 1.º $x = 0$; 2.º $x^4 +$
 $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Dunque un dei cinque valori
 di x che si otterranno dalla risoluzione generale, in tal
 caso deve ridursi a zero, e gli altri quattro debbono es-
 sere le radici dell'equazione $x^4 + px^3 + qx^2 + rx +$
 $s = 0$. Or questa essendo del quarto grado, le sue ra-
 dici debbono aver la forma di quelle del quarto grado;
 poichè dunque esse nello stesso tempo son comprese
 in quelle del quinto grado, perciò bisogna che la ri-
 soluzione di queste, comprenda l'altra di quelle. Si-
 milmente si dimostrerà che la risoluzione del quarto,
 contener deve quella del terzo, e così successivamente.

Dunque la risoluzione di una equazione di qualunque grado, comprender deve la risoluzione di tutti gli altri gradi inferiori.

Da ciò può conchiudersi che l'espressione di una qualunque radice di una data equazione, deve contenere tutte le specie di radicali inferiori al suo grado, fino al primo (*). In fatti facilmente si ravvisa, che di qualunque grado sia una equazione, sempre le sue radici debbon contenere radicali dell' istesso grado di essa; poichè nei casi particolari, nei quali nell' equazione siavi soltanto il primo e l' ultimo termine, l' espressione dei valori di x conterrà un simile radicale; perchè in tal caso essendo l' equazione

espressa da $x^n + k = 0$, si avrà $x = \sqrt[n]{-k}$; per cui essendosi dimostrato, che la formola generale delle radici di un dato grado, comprender deve la formola di quelle di tutti i gradi inferiori al suo, perciò essa contenere deve tutti i radicali, cominciando dal suo grado fino al primo.

194. Dopo aver fatto queste riflessioni sulla forma delle radici, veggasi come ottener si possano.

Ciò che si è per dire, consiste in supporre l' equa-

(*) Quando l' esponente dell' equazione è un numero composto dal prodotto di due o più altri, secondo il metodo che s' impiegherà per risolverla, può accadere che l' espressione generale delle sue radici non contiene esplicitamente i radicali del grado di essa; ma tuttavia questi vi sono implicitamente. Per esempio, nel quarto grado in vece dei $\sqrt[4]{}$, con certi metodi posson trovarsi grandezze come la seguente $\sqrt{a + \sqrt{b}}$; ma è manifesto che questa comprende quelli.

zione da risolversi, come se fosse l'equazione finale ad una incognita, cui si pervenga, se da due equazioni a due incognite, si elimini una di queste. Dunque tali due equazioni bisogna stabilirle in modo, che eliminandosi da esse effettivamente un'incognita, l'equazione finale, che così si ottiene nell'altra incognita, si possa supporre identica colla proposta. Perciò veggasi ora quali esse debbano essere.

Benchè questo metodo non richiede che l'equazione proposta sia priva del secondo termine, pure perchè il calcolo diviene più semplice se essa non l'abbia; perciò si suppone che tal termine siasi tolto, mercè di ciò che si è detto (192).

Così suppongasì che $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \dots + k = 0$, sia la generale equazione da risolversi.

Si prenderanno le due equazioni $y^m - 1 = 0$, ed $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \dots + x = 0$, in cui a, b, c , ec. sono grandezze incognite, che si determineranno, per quel che si dirà in seguito.

Da queste due equazioni si eliminerà y , e si otterrà così una equazione in x , che sarà del grado m , e sarà priva del secondo termine.

I coefficienti (*) delle differenti potenze di x saran composti di a, b, c , ec, e delle loro potenze.

Il coefficiente di ciascun termine di questa equazione, si pareggerà col coefficiente della simile potenza di x nella proposta equazione $x^m + px^{m-1} + \text{ec.}$; avendosi

(*) La parola *coefficiente* qui si prende in senso più ampio che per lo passato. Essa in generale significa la totalità delle grandezze, sien numeriche, sien letterali, che moltiplicano una qualunque potenza della x . Così in px^{m-1} , p è il coefficiente di x^{m-1} .

così tante equazioni per determinare a, b, c , ec., quante sono tali grandezze. Quando si saranno determinate a, b, c , ec., sostituendo i lor valori nell'equazione $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} \dots + x = 0$, ed indi ponendo per y ciascuna delle radici dell'equazione $y^m - 1 = 0$, le quali facilmente si determinano, come si vedrà in seguito; si avran così tutti i valori di x , o sia tutte le radici della proposta.

Applicazione al terzo grado.

195. Sia dunque da risolversi l'equazione di terzo grado, priva di secondo termine, $x^3 + px + q = 0$.

Si stabiliscano le due equazioni $y^3 - 1 = 0$, ed $ay^3 + by + x = 0$. Per eliminare la y , si moltiplichì la seconda di tali equazioni per y , ed in tal prodotto, in vece di y^3 , sostituiscasi il suo valore 1 ottenuto dall'equazione $y^3 - 1 = 0$, e si ha così $by^2 + xy + a = 0$. Questa si moltiplica nuovamente per y , e per y , vi si sostituisce ancora il suo valore 1, e risulta $xy^2 + ay + b = 0$.

Così ottengono le tre equazioni.

$$ay^2 + by + x = 0$$

$$by^2 + xy + a = 0$$

$$xy^2 + ay + b = 0.$$

Per mezzo della prima e della seconda di esse, si determinano i valori di y^2 ed y , supponendo che tali equazioni sieno del primo grado, ed a due diverse incognite y^2 , ed y ; e si ha così $y^2 = \frac{x^2 - ab}{b^2 - ax}$, ed $y = \frac{a^2 - bx}{b^2 - ax}$.

Tali valori di y^3 , ed y si sostituiscano nella terza equazione $xy^3 + ay + b = 0$, e risulta $\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{b^3 - ax} + b = 0$, da cui togliendo il fratto, e riducendo, si ha $x^3 - 3abx + a^3 = 0$.

+ b^3

Paragonando quest'equazione colla proposta $x^3 + px + q = 0$; affinchè esse sieno identiche, bisogna che $-3ab = p$, ed $a^3 + b^3 = q$ (*); quali equazioni son quelle che faran determinare a e b .

Dalla prima si ha $b = -\frac{p}{3a}$; tal valore di b si sostituisca nella seconda, e si ottiene $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$; e moltiplicando per a^3 , e trasponendo, risulta $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$, equazione che può risolversi come quelle del secondo grado (173), e che per conseguenza diverrà $a^6 =$

(*) Affinchè due equazioni sieno identiche, è indispensabile il pareggiamento dei loro termini, che contengono la stessa potenza dell'incognita. In fatti, nel caso delle due anzidette equazioni $x^3 - 3abx + a^3 = 0$, ed $x^3 + px + q = 0$, affinchè esse

+ b^3

sieno identiche, bisogna che le tre radici sieno le stesse in ciascuna; e dunque che in esse la somma delle radici sia la stessa, lo che si sta avverando, perchè in ciascuna non evvi il secondo termine, cioè che la somma delle radici, in ciascuna è zero. Dippiù, che in ciascuna di esse sia la stessa la somma dei prodotti delle radici moltiplicate a due a due, cioè che $-3ab = p$. E finalmente, che $a^3 + b^3$ prodotto di tutte le tre radici dell'una, sia uguale a q prodotto di tutte le tre radici dell'altra. Lo stesso si può dimostrare per qualunque altra equazione.

$$ga^3 + \frac{1}{4} q^2 = \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3, \text{ poi } a^3 - \frac{1}{2} q = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}; \text{ indi trasponendo, } a^3 = \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)} (*), \text{ e finalmente } a = \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right]}.$$

Per determinare b , nell'equazione $a^3 + b^3 = q$ sostituiscasi il valore di a^3 ora ottenuto, e si ha $\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)} + b^3 = q$; onde $b^3 = \frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$, e $b = \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right]}$.

Ora l'equazione $ay^2 + by + x = 0$, offre $x = -ay^2 - by$, dunque $x = -y^2 \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right]} - y \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right]}$, nella quale equazione contengonsi le tre radici della proposta.

Dunque rimane soltanto di determinare i valori di y , e sostituirli in questa equazione. Ora l'equazione $y^3 - 1 = 0$, esibisce $y^3 = 1$, e perciò $y = \sqrt[3]{1} = 1$, ed $y - 1 = 0$. E per averne le altre due radici, devesi (151) dividere $y^3 - 1 = 0$, per $y - 1 = 0$, avendosi così $y^2 + y + 1 = 0$, nelle cui radici si hanno le due rimanenti

(*) In questa equazione, al secondo radicale vien dato solamente il segno superiore perchè si ha bisogno di un sol valore di a , importando poco qualunque sia di essi: poichè ognun dei medesimi soddisfa ugualmente, come qui appresso si vedrà.

di $y^3 - 1 = 0$. Ma risolvendo l'equazione $y^2 + y + 1 = 0$, si ha $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; dunque li tre valori di y sono $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$; per cui i tre rispettivi valori di y^3 sono $y^3 = 1$, $y^3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, $y^3 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$. Onde se nell'equazione $x = -y^3 \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}} - x \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$, sostituisconsi uno per volta i rispettivi valori di y^3 ed y , si hanno questi valori di x , cioè.....

$$x = -\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

$$- \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

$$+ \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

$$+ \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}$$

Se nell'equazione $x^3 + px + q = 0$, suppongasi $q = 0$ essa riducesi ad $x^3 + px = 0$, o sia ad $(x^2 + p) \times x = 0$ dunque una delle sue radici è $x = 0$, e le altre due ritrovansi risolvendo l'equazione $x^2 + p = 0$; dalla quale si ha $x = +\sqrt{-p}$, ed $x = -\sqrt{-p}$; come ap-

punto si ha impiegando la formola generale delle radici; poichè in tal caso la prima di queste diviene . . .

$$\begin{aligned}
 x &= -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} - \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} = -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} + \\
 &\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} = 0; \text{ la seconda, } x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} \\
 &+ \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} \\
 &+ \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \times -\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} \\
 &+ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} = \frac{2\sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} \\
 &= \sqrt{-3} \times \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27} p^3}} = \sqrt{-3} \times \sqrt{\frac{1}{3} p} = \sqrt{-\frac{3}{3} p} \\
 &= \sqrt{-p}. \text{ E similmente si vedrà che la terza è } x = \\
 &-\sqrt{-p}.
 \end{aligned}$$

196. Come l'equazione $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27} p^3$, da cui si è dedotto il valor di a , tien sei radici, forse si potrà domandare, se ciascuna di esse possa impiegarsi ugualmente; e nel caso in cui esse sien tutte ammissibili ugualmente, se ne risulteranno 18 differenti valori di x , poichè già si è veduto, che prendendo un sol valore di a , se ne han tre di x .

Qualunque dei sei valori di a è buono ugualmente; ma qualunque di essi, offre i medesimi tre valori di x , che ognun' altro. Eccone la dimostrazione.

Per rendere più semplice il calcolo, pongasi . . .

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right]} &= m, \text{ e } \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} q - \right.} \\
 \left.\sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}\right]} &= n; \text{ in tal caso la qui trovata}
 \end{aligned}$$

equazione $a^3 = \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$, cambiassi in queste altre due, $a^3 = m^3$, ed $a^3 = n^3$; la prima delle quali ne dà $a = m$, e dividendo $a^3 - m^3 = 0$ per $a - m = 0$, si avrà $a^2 + ma + m^2 = 0$, risolta la quale, si avranno gli altri due valori di a , che si troveranno essere $a = \frac{-m \pm m \sqrt{-3}}{2}$, o sia $a = m \cdot \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$; in tal modo i tre valori di a sono m , $m \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, ed $m \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Similmente si troverà che l'equazione $a^3 = n^3$, esibisce questi tre altri valori di a , cioè $a = n$, $a = n \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, ed $a = n \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Or poichè si ha $a^3 + b^3 = q$, perciò risulterà $m^3 + b^3 = q$, ed $n^3 + b^3 = q$, e sostituendo per m^3 ed n^3 i lor valori; si avrà $b^3 = \frac{1}{2} q - \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$, e $b^3 = \frac{1}{2} q + \sqrt{\left(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3\right)}$, cioè $b^3 = n^3$, e $b^3 = m^3$; dunque i valori di b sono tali, che si ha $ab = mn$, in modo che i valori di a e b , che debbono andare, l'uno coll' altro, sono come segue:

$$a = m \dots\dots\dots, \quad b = n$$

$$a = m \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right), \quad b = n \left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$$

$$a = n \dots\dots\dots, \quad b = m$$

$$a = n \left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right), \quad b = m \left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$$

Sostituendo ora una qualunque di queste sei combinazioni nell'equazione $x = -ay^2 - by$, ponendo successivamente per y ed y^2 i loro rispettivi tre valori, e si avranno sempre queste tre radici; cioè $x = -m - n$, $x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot m + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot n$, ed $x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot m + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot n$.

197. Considerando i tre valori di x trovati qui sopra, si vede che se p è positiva la grandezza $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^2$ sarà sempre positiva, perchè $\frac{1}{4}q^2$ che è il quadrato di $\frac{1}{2}q$, sarà sempre positivo, positiva o negativa che fosse q . La stessa grandezza sarà ancora positiva, se essendo p negativa, fosse $\frac{1}{27}p^2$ minore di $\frac{1}{4}q^2$. In questi due casi, i due ultimi valori di x sono immaginari. Perchè i due radicali cubici essendo allora di grandezze reali e disuguali, i lor prodotti per le grandezze $\sqrt{-3}$, e $-\sqrt{-3}$ di segni contrari, non si distruggeranno scambievolmente; per cui resterà sempre la parte immaginaria in ciascuno di questi valori di x . Dunque allora è reale soltanto il primo valore di x .

198. Ma se essendo p negativa, fosse $\frac{1}{27}p^2$ maggiore di $\frac{1}{4}q^2$, allora la grandezza $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^2$ si muterà nell'altra $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^2$, e sarà negativa, e la

grandezza $\sqrt[3]{(\frac{1}{4} q^3 - \frac{1}{27} p^3)}$ sarà immaginaria: pur non di meno in tal caso i valori di x saran tutti reali.

Per convincersene, bisogna prima osservare, che

$$\sqrt[3]{(\frac{1}{4} q^3 - \frac{1}{27} p^3)} = \sqrt[3]{[(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^3) \times -1]} =$$

$$\sqrt[3]{(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^3)} \times \sqrt[3]{-1}; \text{ per abbreviate suppongasi}$$

$$\frac{1}{2} q = m, \text{ e } \sqrt[3]{(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^3)} = n, \text{ così la grandezza}$$

$$\sqrt[3]{[(\frac{1}{2} q \pm \sqrt[3]{(\frac{1}{4} q^3 - \frac{1}{27} p^3)}]}, \text{ ne diverrà}$$

$$\sqrt[3]{(m \pm n \sqrt[3]{-1})}, \text{ o sia (153) } (m \pm n \sqrt[3]{-1})^{\frac{1}{3}}. \text{ Or}$$

questa duplice grandezza svolgasi in serie, col metodo

esibito (151), si avrà che $(m + n \sqrt[3]{-1})^{\frac{1}{3}}$ ridu-

cesi ad.

$$m^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{1}{3} \frac{n}{m} \sqrt[3]{-1} + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} \sqrt[3]{-1} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5} \sqrt[3]{-1}, \text{ ec.}),$$

$$\text{ed } (m - n \sqrt[3]{-1})^{\frac{1}{3}} \text{ ad.}$$

$$m^{\frac{1}{3}} (1 - \frac{1}{3} \frac{n}{m} \sqrt[3]{-1} + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} + \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} \sqrt[3]{-1} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4} - \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5} \sqrt[3]{-1}, \text{ ec.});$$

ora nella supposizione anzidetta i tre valori di x cambiansi in.

$$x = - \sqrt[3]{(m + n \sqrt[3]{-1})} - \sqrt[3]{(m - n \sqrt[3]{-1})}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt[3]{-3}}{2} \sqrt[3]{(m + n \sqrt[3]{-1})} + \frac{1 - \sqrt[3]{-3}}{2} \sqrt[3]{(m - n \sqrt[3]{-1})}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}.$$

Sostituendo in vece dei due radicali cubici, le serie in cui si sono rispettivamente svolti, facendo le moltiplicazioni per $\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ e per $\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}$, le quali si incontrano nei due ultimi valori di x , eseguendo le ordinarie riduzioni, e di più riflettendo che $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1} = -\sqrt{3}$ (*), e che tutto è moltiplicato per $m^{\frac{1}{3}}$; si avrà

$$x = -m^{\frac{1}{3}} \left(2 + \frac{2}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{20}{243} \frac{n^4}{m^4}, \text{ ec. } \right).$$

$$x = m^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4}, \text{ ec. } \right)$$

$$- m^{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} \frac{n}{m} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5}, \text{ ec. } \right).$$

$$x = m^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4}, \text{ ec. } \right)$$

$$+ m^{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \left(\frac{1}{3} \frac{n}{m} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5}, \text{ ec. } \right).$$

Grandezze nelle quali non vi esistono più immaginari. Finora non si è potuto trovare altro modo che questo; per poter dare in tal caso un valore reale alle tre radici; e da ciò si rileva che in simil caso esse possono avere sotto una forma reale, ma per approssimazione. Questo caso tanto singolare ha esercitato moltissimo gli Analisti, per cui gli si è dato il nome di *caso irriducibile*.

(*) Veggasi la nota della pagina 150.

Diansi ora alcuni esempj.

Sia da risolversi l'equazione $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$; si cominci dal privarla del secondo termine, facendo $y = x - 2$ (192), ed essa riducesi ad $x^3 - 15x + 26 = 0$; si pareggino i suoi termini, cogli analoghi dell'equazione cubica universale, priva del secondo termine, $x^3 + px + q = 0$; si ha dunque $p = -15$, $q = 26$; per cui $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$, ed $\frac{1}{27}p^3 = (\frac{1}{3}p)^3 =$

$$(-5)^3 = -125; \text{ dunque } \sqrt[3]{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = \sqrt[3]{169}$$

$-125) = \sqrt[3]{44}$; e perciò i tre valori di x sono. . .

$$x = -\sqrt[3]{13 + \sqrt[3]{44}} - \sqrt[3]{13 - \sqrt[3]{44}}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt[3]{44}} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 - \sqrt[3]{44}}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 + \sqrt[3]{44}} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \sqrt[3]{13 - \sqrt[3]{44}}.$$

Cioè delle tre radici della proposta equazione, la prima è negativa; e le altre due sono immaginarie.

Diasi per secondo esempio, l'equazione $x^3 - 9x - 10 = 0$. In tal caso, si ha $p = -9$, $\frac{1}{3}p = -3$,

$$\frac{1}{27}p^3 = (-3)^3 = -27, \quad q = -10, \quad \frac{1}{2}q = -5, \quad \text{ed}$$

$$\frac{1}{4}q^2 = 25; \text{ dunque } \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = -2; \text{ per cui la}$$

proposta equazione è nel caso irriducibile. Onde se vogliono avere i valori di x , bisogna adoprare le anzidette serie. A tal uopo si rammenti, che si è suppo-

sto $m = \frac{1}{2} q$, ed $n = \sqrt{\left(\frac{1}{27} p_3 - \frac{1}{4} q^2\right)}$; sicchè $m = -5$, ed $n = \sqrt{2}$. Per effettuare le sostituzioni, si valuti $\sqrt{2}$ che si troverà essere 1,4142; dunque $\frac{n}{m} = \frac{1,4142}{-5} = -0,2828$; si valuterà ancora $m^{\frac{1}{3}}$, cioè $\sqrt[3]{m}$, o sia $\sqrt[3]{-5}$, o pure $-\sqrt[3]{5}$, e si avrà $m^{\frac{1}{3}} = -1,7099$; per cui, sostituendo, si troverà la prima radice essere.

$$x = 1,7099 \left[2 + \frac{2}{9} (0,2828)^3 - \frac{20}{243} (0,2828)^6, \text{ec.} \right],$$

grandezza nella quale debbonsi far solo le indicate moltiplicazioni. Ma prima di finire è di ben l'osservare, che queste serie allora sono utili, quando m è maggiore di n ; che se poi essa ne fosse minore, si praticherà in tal caso ciò che si è detto (159). Del rimanente quando m ed n differiscono poco, bisogna calcolare un gran numero di termini. In appresso si vedrà, come possansi altrimenti approssimare i valori di x .

199. Da tutto ciò che si è esposto conchiudesi che si può risolvere ogni equazione di questa forma $y^3 + py^2 + qy + r = 0$; poichè ponendo $y^3 = x$, essa riducesi ad $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, cioè ad una equazione di terzo grado.

Applicazione al quarto grado.

200. Ogni equazione del quarto grado, priva del secondo termine, si rappresenti per $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Secondo la regola esposta di sopra, si prendano le due equazioni $y^4 - 1 = 0$, ed $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$.

Per eliminare y , si moltiplichi la seconda di tali equazioni tre volte di seguito per y , ed in luogo di y^4 vi si sostituisca il suo valore 1 rilevato dall'equazione $y^4 - 1 = 0$; questa operazione, compresavi l'anzidetta seconda equazione, ne offre le quattro seguenti.

$$ay^3 + by^2 + cy + x = 0$$

$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0$$

$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0$$

$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0$$

Per mezzo delle tre prime di queste, si stabiliscano i valori di y^3 , y^2 , ed y , e si avrà

$$y^3 = \frac{-x^3 + b^3x - bc^2 + 2acx - a^3b}{ax^3 - 2bcx + ab^3 + c^3 - a^3c},$$

$$y^2 = \frac{cx^3 - 2abx + a^3 - ac^2 + b^3c}{ax^3 - 2bcx + ab^3 + c^3 - a^3c},$$

$$\text{ed } y = \frac{-a^3x + bx^3 - c^3x - b^3 + 2abc}{ax^3 - 2bcx + ab^3 + c^3 - a^3c},$$

In vece di y^3 , y^2 , ed y , sostituiscansi questi loro rispettivi valori nell'ultima delle stesse quattro equazioni; e dopo di aver tolto i denominatori, fatte le solite riduzioni, e cambiati i segni, si avrà

$$x^4 - 4acx^3 + 4a^3bx - a^4 = 0.$$

$$- 2b^3x^3 + 4bc^2x - c^4$$

$$+ b^4$$

$$+ 2a^3c^2$$

$$- 4ab^2c$$

Ora affinchè questa equazione sia identica colla proposta $x^4 + px^3 + qx + r = 0$, bisogna che $-4ac - 2b^3 = p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$, $e - a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$, e da queste tre equazioni resteran determinati i valori di a , di b , e di c .

Per aversi b ; la seconda di tali equazioni si divida per $4b$, e si ha $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$, la quale elevandosi a

quadrato, risulta $a^4 + 2a^2c^2 + c^4 = \frac{q^2}{16b^2}$; per cui

$a^4 + c^4 = \frac{q^2}{16b^2} - 2a^2c^2$: nella terza delle stesse equazioni, sostituiscasi questo valore di $a^4 + c^4$, e si ottiene

$-\frac{q^2}{16b^2} + 4a^2c^2 + b^4 - 4ab^2c = r$. Dalla prima

delle medesime, sen deduca il valore di ac , il quale

è $ac = \frac{-p-2b^3}{4}$, e questo si sostituisca nell'equazione

$-\frac{q^2}{16b^2} + 4a^2c^2$, ec., e così si ha $-\frac{q^2}{16b^2} + 4 \times$

$\left(\frac{-p-2b^3}{4}\right)^2 + b^4 - 4b^2 \cdot \left(\frac{-p-2b^3}{4}\right) = r$, o sia $-\frac{q^2}{16b^2}$

$+ \frac{4p^2 + 16pb^3 + 16b^6}{16} + b^4 + \frac{4pb^3 + 8b^6}{4} = r$, o pur

finalmente, togliendo i fratti, trasponendo, riducendo, ed ordinando relativamente a b , ...

$$64b^6 + 32pb^4 + 4p^2b^2 - q^2 = 0$$

Equazione del sesto grado, ma che però se si consideri b^2 come incognita, si risolve come quelle del terzo;

una tale equazione chiamasi la *ridotta*, perchè alla sua soluzione riducesi quella delle equazioni del quarto grado.

201. Se si riflette che l'ultimo termine q^3 di questa equazione ha il segno $-$, si capirà che b^3 deve avere almeno un valore positivo; perchè in questo caso l'equazione dev'esser prodotta o dalla moltiplicazione di tre fattori come questi $(b^3 - l)(b^3 - m)(b^3 - n)$, o pure di tre fattori come quest'altri $(b^3 + l)(b^3 + m)(b^3 + n)$; e soltanto queste due combinazioni possono far venire l'ultimo termine col segno $-$; onde per lo meno vi sarà un fattore di questa forma $b^3 - n$; dunque (178) $b^3 = n$, cioè b^3 avrà almeno un valore positivo. E poichè quest'equazione offre $b = \pm \sqrt[n]{n}$, perciò b avrà almeno due valori reali.

202. Si determinino ora a e c . Le due equazioni $-4ac - 2b^3 = p$, e $4a^3b + 4bc^3 = q$ trovate di sopra, esibiscono $2ac = -\frac{1}{2}p - b^3$, ed $a^3 + c^3 = \frac{q}{4b}$. Ed una volta aggiungendo la prima alla seconda, ed un'altra volta togliendone la 1^a , si avranno le due seguenti equazioni:

$$a^3 + 2ac + c^3 = \frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^3$$

$$a^3 - 2ac + c^3 = \frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^3$$

da ciascuna delle quali estraendo la radice quadrata; si avrà

$$a + c = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}$$

$$\text{ed } a - c = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2} p + b^2\right)}$$

e da queste è facile di dedurne i valori di a e c ; ma però si vedrà che bisognan solo i valori di $a + c$ e di $a - c$. Si sviluppino prima i quattro valori di x .

L'equazione $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$, offre $x = -ay^3 - by^2 - cy$; dunque trattasi di sapere i quattro valori di y che possonsi ottenere dall'equazione $y^4 - 1 = 0$. Ora da questa equazione si ha $y^4 = 1$, da cui estraendo la

radice quarta, risulta $y = \pm \sqrt[4]{1} = \pm 1$, cioè $y = 1$, ed $y = -1$. Ottenuti questi due valori di y , per averne gli altri due, bisogna (187) dividere l'equazione $y^4 - 1 = 0$, pel prodotto $y^2 - 1 = 0$ dei suoi due fattori $y - 1 = 0$, ed $y + 1 = 0$, avendosi così per quoto $y^2 + 1 = 0$; di quale equazione le due radici si troveranno essere $y = +\sqrt{-1}$, ed $y = -\sqrt{-1}$, e queste saranno le due rimanenti radici di $y^4 - 1 = 0$.

Dunque i quattro valori di x sono.

$$\begin{array}{ll} x = -a - b - c & \text{o sia } x = -b - (a + c) \\ x = -a + b + c & \text{o sia } x = -b + (a + c) \\ x = a\sqrt{-1} + b - c\sqrt{-1} & \text{o sia } x = +b + (a - c)\sqrt{-1} \\ x = -a\sqrt{-1} + b + c\sqrt{-1} & \text{o sia } x = +b - (a - c)\sqrt{-1} \end{array}$$

In vece di $a + c$, e di $a - c$, sostituendo i loro valori trovati qui sopra, e riflettendo che $\pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \right)}$

$$\frac{1}{2} p + b^2) \times \sqrt{-1} = \pm \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}, \text{ si avrà..}$$

$$x = -b \mp \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}, x = -b \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)},$$

$$x = +b \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}, x = +b \mp \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}.$$

Equazioni nelle quali facilmente si ravvisa, che dei segni + e - , o che prendansi i superiori, o gli inferiori, sempre si avranno gli stessi quattro valori di x , perchè allora uno qualunque di essi non fa altro, che cambiarsi in uno qualunque degli altri. In questa maniera con uno stesso valor di b , si avran sempre quattro valori di x ; cioè.

$$x = -b - \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}, x = -b + \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)},$$

$$x = +b + \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}, x = +b - \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2} p - b^2\right)}.$$

203. Poichè l'equazione di sesto grado, da cui si ha il valor di b , esibisce tre valori di b^2 , perciò si avranno tre valori di b col segno +, e tre altri col segno -; ora facilmente si vede, che negli ultimi quattro valori di x , o che vi si ponga + b , o che vi si ponga - b , essi risultano i medesimi. Dunque devesi soltanto dimostrare, che ciascuno dei tre valori di b che hanno il segno +, sempre darà gli stessi quattro valori di x .

Per fare ciò, riprendansi le equazioni $-4ac - 2b^2 = p$,
 $4a^2 b + 4bc^2 = q$, e $-a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2 c^2 - 4ab^2 c = r$.

(251)

Quadrando la seconda di esse, si ha $16 b^2 (a^2 + c^2)^2 = q^2$; in cui sostituendovi il valore $\frac{-p-4ac}{2}$ di b^2 , dedotto dalla prima equazione, si otterrà $-8(p + 4ac) \times (a^2 + c^2)^2 = q^2$. Lo stesso valor di b^2 , sostituitosi nella terza equazione, e dopo fatte le riduzioni, si avrà $-a^4 - c^4 + \frac{p^2}{4} + 4pac + 14a^2 c^2 = r$.

Riprendasi ora l'equazione di sesto grado.

$$64b^6 + 32pb^4 + 4p^2 b^2 - q^2 = 0 \\ - 16rb^2$$

E sostituendovi per q^2 e per r i lor valori di già ottenuti; dopo di aver fatto le riduzioni, e di aver diviso per 8, si avrà la seguente equazione.

$$8b^6 + 4pb^4 + 2a^2 b^2 + (p + 4ac) \times (a^2 + c^2)^2 = 0 \\ + 2c^2 b^2 \\ - 8pacb^2 \\ - 28a^2 c^2 b^2$$

E poichè si è trovato $2b^2 = -p - 4ac$, perciò $2b^2 + p + 4ac$ deve dividere l'equazione $8b^6 + 4pb^4$, ec. (187), lo che effettivamente ha luogo. Se si fa la divisione; ed indi si uguagli a zero il quoziente, affinchè abbiani gli altri due valori di b^2 , si otterrà $4b^4 - 8acb^2 + a^4 + c^4 + 2a^2 c^2 = 0$.

Risolvendo quest'equazione come se fosse di secondo grado, si ha $2b^2 = 2ac \pm (a + c)(a - c)\sqrt{-1}$, e duplicandola, $4b^2 = 4ac \pm 2(a + c)(a - c)\sqrt{-1}$.

Ora il suo secondo membro è il quadrato di $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$ (*); dunque $4b^2 = [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]^2$, e per conseguenza $2b = +[(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]$ (**), cioè $= (a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$. In questa maniera, poichè di sopra si è trovato $b^2 = \frac{-p-4ac}{2}$, perciò i tre valori positivi di b sono $b =$

$$+\sqrt{\left(\frac{-p-4ac}{2}\right)}, b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1},$$

$$b = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}. \text{ Il secondo di}$$

questi valori si rappresenti per b' , e per b'' il terzo; in tal caso, prima sommandoli, e poi sottraendoli, si avrà $a+c = b'+b''$, ed $(a-c)\sqrt{-1} = b'-b''$.

Se nei primi quattro valori di x trovati di sopra, si sostituiscano i valori di $a+c$, e di $(a-c)\sqrt{-1}$ essi riduconsi ad $x = -b - b' - b''$, $x = -b + b' + b''$, $x = +b + b' - b''$, $x = +b - b' + b''$, che possonsi ancora porre sotto di questa forma, $x = -b - b' - b''$, $x = +b + b' + b'' - 2b$, $x = +b + b' + b'' - 2b'$, $x = +b + b' + b'' - 2b''$. In cui vedesi chiaramente, che soltanto quattro valori di x possonsi avere; perchè se, per esempio, cambiassi b in b' , nello stesso tempo bisogna cambiare b' in b , poichè vedesi che le tre radici b ,

(*) Per assicurarsene basta soltanto quadrare la grandezza $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$. Ma se dimandasi come questa sia ritrovata, si risponde che si vedrà in appresso.

(**) Qui per segno della radice del secondo membro prendesi solamente il $+$, perchè di sopra si è veduto, che il valore negativo di b condurrebbe agli stessi risultati.

b, b' entrano tutte insieme in ciascuno di questi valori di x . Ora questo cambiamento esibisce gli stessi quattro valori di x .

204. Rimontisi ora alla prima espressione dei valori di x , cioè a questi, $x = -b - b - (a + c)$, $x = -b + (a + c)$, $x = +b + (a - c)\sqrt{-1}$, $x = +b - (a - c)\sqrt{-1}$. Essi offrono tre casi: cioè, o $a + c$ ed $(a - c)\sqrt{-1}$ sono ambedue reali, o ambedue immaginarie, o finalmente una di esse è reale, ed immaginaria l'altra. Alla prima si osserva che quando esse sono immaginarie, possono sempre ridursi a questa forma $\sqrt{-m}$, o sia $\sqrt{m}\sqrt{-1}$, dinotandosi per m una grandezza reale; poichè si ha $a + c = \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$, ed

$(a - c)\sqrt{-1} = \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$, avendo sempre b almeno un valore reale (201), il quale può sempre impiegarsi, esse posson divenire immaginarie, solamente quando la grandezza giacente sotto dell'attual radicale sarà negativa (*).

205. Ciò posto, se $a + c$, ed $(a - c)\sqrt{-1}$ son tutte due reali, nel qual caso i quattro valori di x saranno reali, poichè b ha sempre un valore reale; è evidente che gli altri due valori di $4b^2$, cioè $[(a + c) \pm (a - c)\sqrt{-1}]^2$, saranno reali e positivi.

(*) Non accaderebbe lo stesso, se b non avesse alcun valore reale. Poichè essendo b una immaginaria di questa forma $\sqrt{-k}$, in tal caso $a + c$, ed $(a - c)\sqrt{-1}$ potrebbero essere della forma $\sqrt{\left(-\frac{m}{\sqrt{-k}} - k\right)}$.

206. Se al contrario $a + c$, ed $(a - c)\sqrt{-1}$ son tutte due immaginarie, nel qual caso i quattro valori di x saranno immaginari, allora se $a + c$ si rappresenti per $k\sqrt{-1}$, ed $(a - c)\sqrt{-1}$ per $l\sqrt{-1}$, k , ed l saranno grandezze reali, secondo si è detto (204); dunque si avrà $4b^2 = [(k \pm l)\sqrt{-1}]^2 = -(k \pm l)^2$, cioè che gli altri due valori di b^2 saranno reali, ma negativi.

207. Finalmente se delle due grandezze $a + c$, ed $(a - c)\sqrt{-1}$, una sola è reale, è chiaro che delli quattro valori di x , due saranno reali, e due immaginari; ora in questo caso vedesi ancora chiaramente, che i due valori di $4b^2$ espressi con $[(a + c) \pm (a - c)\sqrt{-1}]^2$, saranno immaginari.

208. Dunque se la ridotta, considerata come equazione di terzo grado, ha le sue tre radici reali e positive, l'equazione di quarto grado avrà reali le sue quattro radici.

Se poi la ridotta ha reali le sue tre radici, e di queste n'è positiva una sola, l'equazione del quarto grado avrà immaginarie le sue quattro radici.

Finalmente, questa equazione, delle sue quattro radici ne avrà due reali e due immaginarie, se la ridotta tiene reale una sola radice.

209. Poichè la formola delle radici di una equazione del terzo grado, offre tali radici sotto forma reale, quando è reale soltanto una di esse (197); perciò bisogna conchiudere che allor si hanno le quattro radici di una equazione di quarto grado tutte sotto forma reale, quando di esse ne sono due soltanto effettivamente reali.

210. Veggasene qualche esempio. Suppongasì di vo-

lere le radici dell' equazione $x^3 + 3x^2 - 52x + 48 = 0$. Sarà $p = 3$, $q = -52$, $r = 48$, per cui $q^2 = 2704$. Dunque la ridotta sarà $64b^3 + 96b^2 - 732b - 2704 = 0$, o pure $u^3 + 6u^2 - 183u - 2704 = 0$, se per brevità pongasi $4b^3 = u$. Per privarla del secondo termine, si pone $u = z - 2$, e così si ha $z^3 - 195z - 2322 = 0$.

Secondo ciò che si è detto (197) sulle equazioni del terzo grado, si troverà che z ha un sol valore reale, il quale è $z = -\sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 - \sqrt{1073296}}$, ma $\sqrt{1073296} = 1036$; dunque $z = -\sqrt[3]{(-1161 + 1036)} - \sqrt[3]{(-1161 - 1036)}$; cioè $z = -\sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{-2197}$, o sia $z = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{2197}$, o pure $z = 5 + 13 = 18$. E poichè $u = z - 2$, perciò $u = 18 - 2 = 16$; per cui $4b^3 = u = 16$; donde si ha $b^3 = 4$, e $b = 2$. Sostituendo questo valor di b , e quelli di p , q , ed r , nei valori di $a + c$, e di $(a - c)\sqrt{-1}$ trovati qui sopra; si avrà $(a + c) = \sqrt{(-\frac{52}{8} - \frac{3}{2} - 4)} = \sqrt{-12}$; ed $(a - c)\sqrt{-1} = \sqrt{(\frac{52}{8} - \frac{3}{2} - 4)} = \sqrt{1} = 1$. Dunque i quattro valori di x saranno $x = -2 - \sqrt{-12}$, $x = -2 + \sqrt{-12}$, $x = +2 + 1$, ed $x = +2 - 1$. Così i due valori reali sono $x = 3$, ed $x = 1$.

In questo esempio i numeri sonosi ritrovati tali, che si è potuto valutare esattamente ciascun radicale. Ma questi casi sono rarissimi. Il più delle volte, quando si vuole avere il valor numerico dipendente dai radi-

cali, bisogna valutare ciascun di questi per approssimazione.

Prendasi per secondo esempio, l'equazione $y^4 + 4y^3 + 9y^2 + 12y + 3 = 0$. Si cominci dal cancellarne il secondo termine, facendo (192) $y = x - 1$; si ha l'altra equazione $x^4 + 3x^3 + 2x - 3 = 0$. Dunque $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$; in tal modo la ridotta viene $64b^6 + 96b^4 + 84b^2 - 4 = 0$, o pure $u^3 + 6u^2 + 21u - 4 = 0$, col porre $4b^2 = u$. Da tale equazione tolgasi il secondo termine, mettendo $u = z - 2$, e risulta $z^3 + 9z - 30 = 0$, equazione che tiene una sola radice reale (197), e che per tal motivo dinota, (208), che l'equazione del quarto grado avrà due sole radici reali. Si applichino dunque le formole esibite (195), si troverà $z = -\sqrt[3]{(-15 + \sqrt{252})} - \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{252})}$, o sia $z = \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$; e poichè $4b^2 = u$, perciò $b^2 = \frac{u}{4}$, e $b = \sqrt{\frac{u}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{u} = \frac{1}{2} \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}$. Sostituendo questo valore di b , e quelli di p e di q , nelle formole generali dei quattro valori di x , si troverà che i due valori reali sono compresi nella seguente equazione.

$$x = -\frac{1}{2} \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]} \\ \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}}} \\ - 1 - \frac{1}{4} \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}.$$

Riflessioni sul Metodo precedente, e sulla sua applicazione alle Equazioni di gradi superiori al quarto.

211. L'equazione che ha dato il valore di δ per l'equazione di quarto grado, è stata del sesto grado; ma se si fosse cercata direttamente l'equazione che deve dare a , o pure quella che deve dare c , si sarebbe pervenuto ad una equazione di ventiquattresimo grado, come se ne può restar convinto nella seguente maniera. Qui sopra (203) col trasformar la ridotta, si è trovato, $-8(p + 4ac) \times (a^2 + c^2)^2 = q^2$, e $-a^4 - c^4 + \frac{p^2}{4} + 4pac + 14a^2c^2 = r$. Se quest'ultima equazione si moltiplica per $8(p + 4ac)$, e dal prodotto si sottrae la prima, dopo fatte le riduzioni, si avrà,

$$\begin{aligned} 512a^3c^3 + 256pa^2c^2 + 40p^2ac + 2p^3 &= 0. \\ -32rac &- 8pr \\ &+ q^2 \end{aligned}$$

Equazione che combinata coll'altra $-a^4 - c^4 + ac = r$, per eliminare c , darà (169) un'equazione del ventiquattresimo grado.

Ma tralasciando di fare questo calcolo, se ne può esser sicuro ancora di quest'altro modo.

L'equazione $-8(p + 4ac)(a^2 + c^2)^2 = q^2$, ne dà $(a^2 + c^2)^2 = -\frac{q^2}{8(p + 4ac)}$, e per conseguenza $a^4 +$

$c^4 = -\frac{q^2}{8(p + 4ac)} - 2a^2c^2$. Or se si risolve l'equazione $512a^3c^3 + ac$, che considerando ac come incognita, è di terzo grado, si avrà un valore di ac , che sostituito nel secondo membro dell'equazione $a^4 + c^4$

= ec., formerà una grandezza interamente cognita, che chiamisi A; ora se il valore di ac chiamisi B, sarà $c = \frac{B}{a}$; dunque l'equazione $a^8 + c^8 = A$, diverrà $a^8 - Aa^4 = -B^4$, la quale avendo otto radici, darà otto valori di a . Ora ac ha tre valori; dunque si avranno tre equazioni di ottavo grado, e perciò 24 valori per a ; onde l'equazione in a sarà di ventiquattresimo grado.

212. Ma nello stesso tempo si osserva che gli esponenti di tutte le potenze di a , che si conterranno in questa equazione, saranno dei multipli di 4; poichè (183) essa sarà il prodotto di tre grandezze della forma $a^8 - Aa^4 + B^4$, perchè la medesima deve contenere le 24 radici che da queste tre si rilevano. Dunque se si pone $a^4 = u$, si avrà in u , un'equazione del sesto grado. Or questa equazione può contenere soltanto dei radicali quadratici, e dei radicali cubici, lo che vedesi chiaramente risolvendo l'equazione $a^8 - Aa^4 = -B^4$ come se fosse del secondo grado; perchè allor si avrà $a^4 = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - B^4\right)}$, grandezza nella quale A e B possono esser composte solamente di radicali quadratici e di radicali cubici, poichè essi dipendono da una equazione del terzo grado.

213. Se ora si richiami ciò che si è osservato sul terzo grado, ove la ridotta era $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$; è evidente che a^3 può soltanto contenere dei radicali quadratici. Finalmente è chiaro che nell'equazione di secondo grado priva del secondo termine $x^2 + p = 0$, facendo come qui sopra $y^2 - 1 = 0$, ed $ay + x = 0$, la ridotta sarà $a^3 + p = 0$, la quale dà un sol valore

per a^5 ; così la ridotta del secondo grado dà per a^2 un radicale del primo grado, cioè una grandezza senza radicale.

Dunque risalendo, si conchiederà per analogia, che se la ridotta del quinto grado contiene soltanto quelle potenze di a , le quali sono moltiplici di 5, il valore di a^5 conterrà solamente dei radicali biquadratici, dei radicali cubici, e dei radicali quadratici; dunque se si dimostra che, pel metodo attuale, questa ridotta contiene solo delle potenze di a , i cui esponenti sien dei moltiplici di 5, ne avverrà che questo metodo riduce la difficoltà delle equazioni del quinto grado, a quella delle altre di gradi inferiori. Ora ecco come si può esser sicuro che la ridotta non avrà altre potenze di a .

214. Suppongasì che $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, rappresenti generalmente qualunque equazione del quinto grado. E secondo il metodo, prendendo le due equazioni $y^5 - 1 = 0$, ed $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + s = 0$, dopo di avere eliminato y dello stesso modo che si è praticato nel terzo e nel quarto grado, si avrà

$$x^5 - 5adx^3 + 5bda^2x^2 - 5cda^3x + a^5 = 0.$$

$$- 5bcx^3 + 5a^2cx^2 - 5a^3bx + b^5$$

$$+ 5c^3dx^2 - 5b^3dx + c^5$$

$$+ 5ab^2x^2 - 5ac^3x + d^5$$

$$+ 5a^2d^3x - 5a^3cd$$

$$+ 5b^3c^3x - 5ab^2c$$

$$- 5abcdx - 5ab^2d^3$$

$$- 5bc^3d$$

$$+ 5a^2bc^2$$

$$+ 5a^2b^3d$$

$$+ 5b^3ca^2$$

$$+ 5ac^3d^3$$

*

Paragonando dunque il coefficiente di x^3 a p , quello di x^2 a q , quello di x ad r , e finalmente la totalità dei termini senza x ad s ; si avranno quattro equazioni in cui se si fa $b = ga^3$, $c = ha^3$, $d = ka^3$, lo che è permesso, queste quattro equazioni si cambieranno in quattro altre che conterranno g , h , k ed a ; ma non si avranno altre potenze di a , fuorchè a^3 , a^6 , ec.; dunque se si sa che si sono eliminate g , h , k , l'equazione finale conterrà solamente quelle potenze di a , i cui esponenti saranno dei multipli di 3.

215. In seguito delle già dette cose vedesi dunque, che riguardo ad a , cioè riguardo al coefficiente del primo termine dell'equazione $ay^{m-1} + by^{m-2} + ec. + x = 0$, la ridotta pel secondo grado, è del grado secondo, o sia del grado 1. 2. Pel terzo grado essa è del sesto, cioè del grado 1. 2. 3. Pel quarto grado, essa è del ventiquattresimo, o pure del grado 1. 2. 3. 4. Dunque vi è ben luogo a credere, che pel quinto grado, essa sarà del grado 1. 2. 3. 4. 5, cioè del 120.^{mo}, e del 720.^{mo}, pel sesto grado; e così in seguito.

E benchè pel quarto grado si è trovata una ridotta del sesto, questa è una accidentale semplificazione, che probabilmente avrà luogo, di una analoga maniera, in tutte le equazioni, il cui esponente è un numero composto, ma non in quelle, il cui esponente sarà un numero primo. In fatti pel quarto grado è facile vedere, che questa semplificazione è dovuta alle simili relazioni che ha b riguardo ad a e c , in ciascuna delle equazioni in cui essa entra; mentre che a non è disposta della stessa maniera riguardo a b , che riguardo a c . Ma nel quinto grado, non v'è alcuna delle grandezze a , b , c , d , di cui possa dirsi ciò che

si è detto di b nel quarto; lo che si osserva facilmente dai coefficienti della surriscritta equazione $x^5 - 5(ad + bc)x^3 + ec. = 0$.

216. Che che ne sia, poichè la ridotta del quinto grado non può contenere altre potenze di a , fuorchè quelle i cui esponenti sono dei moltiplici di 5, perciò ne sembra che facendo $a^5 = u$, l'equazione del 24.^{mo} grado che allor si avrà, non può altro contenere che dei $\sqrt[5]{u}$, dei $\sqrt[2]{u}$, e dei $\sqrt[3]{u}$; giacchè l'equazione $a^5 = u$ esibendo $a = \sqrt[5]{u}$, dimostra evidentemente i radicali di quinto grado che deve contenere l'equazione proposta.

Da ciò vedesi quel che si deve dire su dei gradi più elevati. Quelli che desidereranno maggior dettaglio su di questa materia, potranno consultare le *Memorie dell'Accademia delle Scienze*, per gli anni 1762 e 1765, ove nello stesso tempo troveranno varie classi di equazioni che ammettono una facile soluzione algebrica, come pure un altro metodo dedotto da quello esposto, e che facilita il lavoro nelle equazioni il cui esponente non è numero primo.

217. L'esposto metodo suppone, come si è veduto, che possansi sempre avere tutte le radici dell'equazione a due termini $y^n - 1 = 0$. Ora ciò non soffre alcuna difficoltà, perchè avendone almeno sempre una, con una semplice estrazione di radice del grado n , cioè avendo sempre $y = 1$, quando n è impari, ed $y = 1$, $y = -1$ quando n è pari, la difficoltà di aver le altre, tutto al più consiste in risolvere un'equazione del grado $n - 1$, ciò che si suppone saper di già, quando si passa alla risoluzione di una equazione generale del grado n . Ma la difficoltà non è su di questo gra-

do; essa cade in generale sul grado $\frac{n-1}{2}$, quando n è impari, e sul grado $\frac{n-2}{2}$, quando n è pari, perchè dopo aver diviso l'equazione $y^n - 1 = 0$, pel suo fattore $y - 1 = 0$, quando n è impari, o per $(y-1) \times (y+1) = 0$, cioè per $y^2 - 1 = 0$, quando n è pari, il quoziente, o sia l'equazione che deve dare le altre radici, sarà sempre di questa forma $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \text{ec.} \dots + 1 = 0$; in cui k è un numero pari. Or questa equazione si può scomporre in un numero $\frac{k}{2}$ di fattori del secondo grado, della forma $y^2 + hy + 1 = 0$; e l'equazione che darà h , giammai non monterà, che al grado $\frac{k}{2}$. Qui non si dimostra minuatamente quest'ultima proposizione; si potrà esser di ciò sicuro, supponendo che l'equazione $y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$, sia identica col prodotto dell'altra $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, moltiplicata per $y^4 + hy + 1 = 0$; pareggiando i termini di questo prodotto, cogli analoghi di $y^8 + y^7 + \text{ec.}$; si avranno delle equazioni, da cui si determineranno facilmente a, b, c, d, e ; e l'equazione in h , sarà del quarto grado. Per la dimostrazione generale, veggasi il tomo VI delle Memorie di Pietroburgo.

Dei Divisori commensurabili delle Equazioni.

218. Da ciò che precede vedesi, che essendo la generale espressione delle radici delle equazioni, un com-

posto di radicali di differenti gradi , e differentemente tra lor combinati ; può facilmente accadere, che sebbene il valore di una o di più radici sia un numero commensurabile , pure esso si presenti sotto una forma incommensurabile ; lo che in fatti accade nel terzo , e nel quarto grado, e che più probabilmente accaderà negli altri gradi. È dunque utile di avere un metodo per trovare questi divisori commensurabili , quando ve ne sono.

Come l'ultimo termine di una equazione è il prodotto di tutte le sue radici (180), così quei numeri che saranno divisori esatti di quest'ultimo termine, potranno essere i valori commensurabili della sua incognita. Si potranno dunque prendere successivamente tutti i divisori dell'ultimo termine, e sostituirli nell'equazione, in vece della sua incognita, tanto col + quanto col - (perchè tale incognita può avere sì dei valori positivi, che dei negativi): allora quei divisori che sostituiti in tal modo, ridurranno tutta l'equazione a zero, saran di queste radici. Bene inteso però, che qui si suppone di essersi fatti passare tutti i termini dell'equazione in un sol membro.

Ma questa operazione sarà spesso lunghissima, per cui or si va a vedere a qual segno si distinguano i divisori da ammettersi, e quelli da rigettarsi ; ma prima bisogna esporre come ritrovansi tutti li divisori di un numero.

219. Per trovare tutti li divisori di un numero, bisogna dividerlo successivamente per i numeri primi per li quali esso potrà esser diviso, cominciando dai più semplici, e continuando a dividere per lo stesso numero finchè si potrà. Allora scrivonsi a parte ed in una stessa

linea tutti questi numeri primi, e ciascuno tante volte, quante ha potuto dividere. Indi essi si moltiplicano a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec.; questi prodotti, i numeri primi che si son trovati, e l'unità, costituiscono tutti li chiesti divisori.

Per esempio, vogliansi trovare tutti li divisori di 60? Si divide 60 per 2, e si ha 30; si divide 30 per 2, e si ha 15; si divide 15 per 3, e si ha 5; finalmente si divide 5 per 5, e si ha 1. Così i divisori primi sono 2, 2, 3, 5; i quali moltiplicati a due a due, fanno, 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Gli stessi moltiplicati a tre a tre, fanno 12, 20, 30, 30; e finalmente moltiplicati tutti quattro, fanno 60.

Riunendo insieme tutti questi divisori, ma tralasciando però quelli che trovansi ripetuti, e comprendendovi l'unità ch'è divisore di ogni numero, si ha.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

220. Suppongasi ora che vogliansi avere i divisori commensurabili di un' equazione, che però gli abbia. Per esempio, di una equazione del quarto grado, rappresentata generalmente da $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Si esprima questo divisore per $x + a = 0$; dunque in tal caso la proposta equazione può considerarsi come formata dalla moltiplicazione di $x + a$, per un fattore di 3.º grado, come $x^3 + kx^2 + mx + n$ (183); si moltiplichino dunque questi due fattori tra loro, e si ha

$$\begin{aligned} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an &= 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx \end{aligned}$$

che dovendo essere identica con $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, ne dà le seguenti equazioni $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, ed $an = s$, o sia $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$, $k = \frac{q - m}{a}$, ed $1 = \frac{p - k}{a}$.

Ora suppongasì dunque che avendo preso per a un dei divisori dell' ultimo termine, vogliasi sapere se esso possa essere ammesso; le equazioni $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r - n}{a}$

ec., dinotano: che l' ultimo termine dell' equazione deve dividersi per questo divisore; che il quoto che così risulta deve sottrarsi dal coefficiente di x , e che il residuo deve dividersi per questo stesso divisore; che questo secondo quoto deve sottrarsi dal coefficiente di x^2 , ed indi dividere il residuo anche per questo stesso divisore; e continuar sempre così, finchè giungasi al coefficiente del secondo termine dell' equazione, pel quale devesi avere 1 per quoto. Se il divisore che si è preso, soddisfa a tutte queste divisioni, esso può prendersi sicuramente per a ; ma se poi una sola di queste divisioni non è esatta, lo scelto numero deve rigettarsi.

Come l' unità è sempre divisore di ogni numero, così è chiaro che bisognerà anche tentar questa, tanto in + quanto in -; ma in riguardo ad essa, sarà meglio di far l' esame, col sostituire + 1 e - 1 successivamente, in vece di x nell' equazione; qual sostituzione è molto facile, perchè ogni potenza di + 1 è + 1, ogni potenza pari di - 1 è anche + 1, e - 1 è ogni potenza impari di - 1. Se niuna di queste due sostituzioni offre zero per risultato, in tal caso a non può essere nè + 1 nè - 1.

Ciò posto, ecco come si procederà all' esame di tutti i divisori dell' ultimo termine, eccetto che l' unità.

Suppongasì che si dimandi se l'equazione $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$, abbia qualche divisore commensurabile, si cerchino i divisori dell' ultimo termine 15, eccetto che l'unità; dopo averli trovati, scrivansi per ordine di grandezza (prendendoli tanto in + quanto in -) come vedesi qui sotto nella prima linea dei numeri.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0 \\
 \text{Divisori di 15.} \dots + 15, + 5, + 3, - 3, - 5, - 15 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} + 1, + 3, + 5, - 5, - 3, - 1 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} - 21, - 23, - 25, - 15, - 17, - 19 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} + 5 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} + 18 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} - 6 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} - 3 \\
 \phantom{\text{Divisori di 15.}} + 1
 \end{array}$$

Si divide l' ultimo termine + 15, per ciascun dei numeri della prima linea, e scrivonsi i quozienti nella seconda linea.

Ciascun termine della seconda linea si sottrae dal coefficiente di x , cioè da - 20, ed i residui si scrivono nella terza linea.

Ciascun termine di questa dividesi pel corrispondente termine della prima linea, e scrivonsi successivamente tutt' i quozienti esatti che s' incontrano. Qui se ne trova un solo, cioè + 5; così si è sicuro che esso ha un solo divisor commensurabile. Ma sia che esso abbia un sol quoziente esatto; sia che ne abbia più, si continuerà in questo modo.

Si sottrae ciascun quoziente, dal coefficiente 23 di

x^2 , ed i residui scrivonsi nella quinta linea; qui è 18.

Si divide come qui sopra, ciascun di questi residui pel corrispondente termine della prima linea, e ciascun quoziente scrivesi al di sotto; qui è - 6.

Ciascun di questi nuovi quozienti si sottrae dal coefficiente - 9 di x^2 , ed i residui scrivonsi al di sotto; qui è - 3.

Finalmente dividonsi questi, anche pel termine corrispondente della prima linea. Si ha + 1 per quoziente; donde si conchiude che il termine corrispondente - 3, della prima linea, è a ; e che per conseguenza il divisore $x + a$, è $x - 3$; cioè che $x - 3$ divide l'equazione: dunque $x = 3$ è il valor commensurabile di x nella proposta equazione.

Con questo metodo, non solo si trova il divisore dell'equazione, ma anche il quoziente. Nella colonna che ha soddisfatto, basta prendere i numeri che trovansi sulle linee di numero pari, contando dalla prima; questi numeri formeranno l'ultimo termine, ed i successivi coefficienti di x , x^2 , x^3 , ec. nel secondo fattore dell'equazione. Per esempio, qui trovansi - 5, + 5, - 6, + 1; se ne conchiude che il secondo fattore è $1x^3 - 6x^2 + 5x - 5$, o sia $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$; in modo che l'equazion proposta, è il prodotto di $x - 3$ per $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

Si prenderà per secondo esempio, la seguente equazione:

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0.$$

Divisori di 14. ... + 14, + 7, + 2, - 2, - 7, - 14
 + 1, + 2, + 7, - 7, - 2, - 1
 - 34, - 35, - 40, - 26, - 31, - 32
 - 5, - 20, + 13,
 + 7, + 22, - 11,
 + 1, + 11,

Oprando come nell'esempio precedente, si trovano solamente i divisori 7, e 2, che sostengono la prova fino all'ultima linea; ma il secondo, cioè 2, non può soddisfare, perchè l'ultimo quoziente che esso ne dà, è 11, mentre che deve essere 1. Così si ha un sol divisore commensurabile, e questo è $x + 7$.

221. Questo metodo è applicabile ugualmente alle equazioni litterali; se esse hanno ciascun termine dello stesso numero di dimensioni, allora si scriveranno nella prima linea i soli divisori dell'ultimo termine, i quali sono d'una stessa dimensione. Se poi li termini non son ciascuno dello stesso numero di dimensioni, allora essi si renderan tali, coll'introdurvi un fattore elevato a quella potenza che si richiede, affinchè ottengasi il pareggiamento dei numeri delle loro dimensioni.

Quando il numero delle dimensioni è lo stesso in ciascun termine di una equazione, questa allora dicesi *omogenea*.

222. Si è supposto che il primo termine abbia l'unità per coefficiente; ma se questo siane diverso, il divisore in vece di esser semplicemente $x + a$, sarà in generale $mx + a$, dinotandosi per m qualunque dei fattori del coefficiente del primo termine. Allora se vogliasi usare il metodo precedente, bisognerà per ciascun fattore, in vece della seconda linea, impiegar questa però moltiplicata per m ; in vece della quarta, impiegar questa moltiplicata anche per m , e così successivamente; ed ammettere per a , li termini della prima, che avranno per corrispondenti nell'ultima, il secondo fattore del primo termine della proposta equazione; ma basterà prendere in $+i$ numeri che si tenteranno per m . Del resto questo caso può ridursi al precedente, togliendo un tal coefficiente col metodo esibito (191).

223. Quando un'equazione non ha divisori commensurabili del primo grado, essa però può averne del secondo; e questi posson trovarsi con un metodo analogo a quello già esposto; ma il calcolo sarà molto lungo. Si sarà anche fatto il tutto in quest'altro modo. Si rappresenti questo fattore per $x^2 + mx + n$, il qual si moltiplichi per un altro fattore tale, che il prodotto sia una grandezza del grado della proposta equazione, cioè se l'equazione sia del quinto grado, bisognerà moltiplicarlo per un fattore del terzo, come il seguente $x^3 + ax^2 + bx + c$. Si pareggino i termini del prodotto, cogli analoghi dell'equazione, e si avranno tante equazioni particolari, quante son le incognite a, b, c, m, n , ec. Da queste equazioni si rileveranno facilmente i valori di a, b, c , che si sostituiranno nelle rimanenti equazioni, allor si avranno due equazioni che conterranno soltanto le incognite m ed n . Si elimini m colle regole stabilite (167), e si cerchino i divisori commensurabili dell'equazione in n . Si avrà il valor di n , per mezzo del quale e del valore di m in n che si otterrà coll'eliminazione, si determinerà m , e quindi il fattore $x^2 + mx + n$.

Da ciò si rileva il modo da tenere per trovare i fattori commensurabili dei gradi 3.^o, 4.^o, ec.

Dell'estrazione delle radici delle grandezze in parte commensurabili, ed in parte incommensurabili.

224. Le equazioni che risolvonsi come quelle del secondo grado (173), conducono ad espressioni di questa forma

$\sqrt{7 + \sqrt{48}}$, o $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$, o ec. Questo

grandezze posson sovente ridursi ad altre che contengan solo delle grandezze razionali, e dei semplici radicali quadratici; o solamente dei radicali quadratici; o pure dei radicali quadratici moltiplicati o divisi per un radicale semplice dello stesso grado del radicale superiore. Veggasi come procedere si debba per le grandezze della forma $\sqrt{C + \sqrt{D}}$.

Una tal grandezza si rappresenti per $\sqrt{m + \sqrt{n}}$, in cui m ed n sien due incognite. Sarà dunque $\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{m + \sqrt{n}}$; e quadrando, si avrà $C + \sqrt{D} = m + 2\sqrt{mn} + n$. E come si ha una sola equazione e due incognite, così si può una di queste determinare con qual condizione si vorrà; si può dunque supporre $2\sqrt{mn} = \sqrt{D}$, ed allor l'equazione riducesi a $C = m + n$; e quadrando ciascuna di queste due equazioni, si ha $4mn = D$, ed $m^2 + 2mn + n^2 = C^2$; e dalla seconda di queste due equazioni togliendone la prima, si ha $m^2 - 2mn + n^2 = C^2 - D$; donde si vede che affinchè m ed n sien commensurabili, bisogna che il valore di $C^2 - D$ sia un quadrato, perchè $m^2 - 2mn + n^2$ è un quadrato. Per cui estraendo la radice quadrata, si avrà $m - n = \sqrt{C^2 - D}$; ma qui sopra si ha $m + n = C$, dunque una volta sommando queste due equazioni, ed un'altra sottraendole, e dividendo la somma e'l residuo sempre per 2, si avrà $m = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}$, ed $n = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}$; dunque $\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}} + \sqrt{\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}}$; or benchè ciascuno dei due termini di

questo secondo membro contiene due radicali, pure ciascuno ne avrà soltanto uno, quando $\sqrt{C + \sqrt{D}}$ sarà riducibile, poichè in tal caso $C^2 - D$ sarà un quadrato, come si è già veduto.

Prendasi per esempio la grandezza $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$: qui $C = 7$, $\sqrt{D} = \sqrt{48}$, per cui $D = 48$; dunque $C^2 - D = 49 - 48 = 1$, e $\sqrt{C^2 - D} = \sqrt{1} = 1$; dunque fatte le dovute sostituzioni nella già trovata for-

mola, si avrà $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} +$

$\sqrt{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Se abbiassi $\sqrt{11 +$

$6\sqrt{2}}$, e si trasporti 6 sotto del secondo radicale (112), si avrà $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$, che similmente oprando, si ridurrà a $3 + \sqrt{2}$.

Il secondo esempio si esegua su di $\sqrt{4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$ che qui sopra (203) si è veduto equivalere ad $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$. Se si trasporti $2(a+c)(a-c)$ sotto di $\sqrt{-1}$, la grandezza $\sqrt{4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}}$, riducesi a $\sqrt{4ac + \sqrt{-4(a+c)^2(a-c)^2}}$; dunque $C = 4ac$, $\sqrt{D} = \sqrt{-4(a+c)^2 \times (a-c)^2}$, in cui $D = -4(a+c)^2(a-c)^2 = -4a^4 + 8a^3c^2 - 4c^4$; sicchè $C^2 - D = 16a^2c^2 + 4a^4 - 8a^3c^2 + 4c^4 = 4a^4 + 8a^3c^2 + 4c^4$; dunque $\sqrt{C^2 - D} = 2(a^2 + c^2)$, e perciò in tal caso la formola diviene $\sqrt{2ac + a^2 + c^2} + \sqrt{2ac - a^2 - c^2}$, cioè $\sqrt{(a+c)^2} + \sqrt{[(a-c)^2 \times -1]}$, la qual riducesi ad $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$.

Se in vece di $\sqrt{C + \sqrt{D}}$, abbiassi $\sqrt{C - D}$, in vece di $\sqrt{(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D})} + \sqrt{[\frac{1}{2}C$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{C^2 - D}], \text{ si avrà } \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \sqrt{C^2 - D}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2} C - \frac{1}{2} \sqrt{C^2 - D}\right]}.$$

225. Si esaminino ora le grandezze della forma $\sqrt[3]{C + \sqrt{D}}$. Se può estrarsi esattamente la radice cubica da $C + \sqrt{D}$, una tal radice aver deve la seguente forma $m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \sqrt{n}$; perchè se supponesi che essa può contenere due radicali quadratici, ancor due ne conterrà il cubo, come può osservarsi con elevare a cubo $\sqrt{g} + \sqrt{k}$. Ma nell' istessa maniera vedesi che essa può contenere un radicale cubico, come $\sqrt[3]{k}$. Ciò posto, facciasi dunque $\sqrt[3]{C + \sqrt{D}} = m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \sqrt{n}$; elevando a cubo, si avrà $C + \sqrt{D} = m^3 k + 3m^2 k \sqrt{n} + 3m k n + k n \sqrt{n} = m^3 k + 3m^2 k n + (3m^2 k + k n) \sqrt{n}$; e pareggiando tra loro le parti irrazionali, e le razionali, si avrà $\sqrt{D} = (3m^2 k + k n) \sqrt{n}$, e $C = m^3 k + 3m k n$; e quadrando queste due equazioni, si avrà $D = 9m^4 k^2 n + 6m^2 k^2 n^2 + k^2 n^3$, e $C^2 = m^6 k^2 + 6m^4 k^2 n + 9m^2 k^2 n^2$; e togliendo la prima di queste due equazioni dalla seconda, si ha $C^2 - D = m^6 k^2 - 3m^4 k^2 n + 3m^2 k^2 n^2 - k^2 n^3$, e moltiplicando tutto per k , risulta $C^2 k - Dk = m^6 k^3 - 3m^4 k^3 n + 3m^2 k^3 n^2 - k^3 n^3$; ed estraendo la radice cubica, si ottiene $m^2 k - nk = \sqrt[3]{(C^2 k - Dk)}$, per cui $m^2 - n = \frac{\sqrt[3]{(C^2 - D)k}}{k}$; dunque affinchè $m^2 - n$ sia razionale, e quindi affinchè $C + \sqrt{D}$ abbia una radice cubica, bisogna che $(C^2 - D)k$ sia un cubo

esatto, lo che può sempre ottenersi prendendo per k quel numero che conviene; perchè k è totalmente arbitraria, in modo che se $C^3 - D$ è un cubo perfetto,

si farà $k = 1$. Per brevità pongasi $\frac{\sqrt[3]{(C^3 - D)k}}{k}$

$= p$; si avrà $m^3 - n = p$, onde $n = m^3 - p$; sostituendo questo valore nell'equazione $C = m^3 k + 3mk n$, dopo fatte le riduzioni, si avrà $4km^3 - 3pkm - C = 0$. Dunque affinchè m , ed n sieno razionali bisogna che il valore di m rilevato da quest'ultima equazione, sia razionale; dunque bisognerà cercare i divisori commensurabili di essa (220), i quali non mai potran mancare, se m ed n sien razionali, cioè se la proposta grandezza sia suscettibile di una radice cubica della forma $m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$.

Diasi per esempio la grandezza $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})}$; dunque qui $C = 20$, $\sqrt{D} = 14\sqrt{2}$, e perciò $C^3 = 400$, e $D = 392$, per cui $C^3 - D = 8$; cioè un cubo: dunque può farsi $k = 1$. Ciò posto, si avrà dunque

$$\frac{\sqrt[3]{(C^3 - D)k}}{k} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 1}}{1} = \sqrt[3]{8} = 2, \text{ per cui anche}$$

$p = 2$. Sicchè l'equazione $4km^3 - 3pkm - C = 0$, diverrà dunque $4m^3 - 6m - 20 = 0$, e dividendo per

2, $2m^3 - 3m - 10 = 0$; pongasi ora $m = \frac{y}{2}$, ad og-

getto di togliere il coefficiente dal primo termine (191), e dopo fatta ogni riduzione, si ha $y^3 - 6y - 40 = 0$, la quale (220) tiene $y - 4$ per divisore commensurabile; dunque $y = 4$, e perciò $m = 2$; ora l'equazio-

(274)

ne $n = m^2 - p$, ne offre $n = 4 - 2 = 2$; dunque

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Il secondo esempio si stabilisca sulla grandezza

$\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})}$. Qui si ha $C = 52$, $\sqrt{D} = 30\sqrt{3}$; dunque $C^2 = 2704$, $D = 2700$; sicchè $C^2 - D = 4$; per cui affinchè $(C^2 - D)k$ divenga un cubo, biso-

gna supporre $k = 2$; ed in tal caso $\frac{\sqrt[3]{[(C^2 - D)k]}}{k}$,

o sia p , diviene $\frac{\sqrt[3]{8}}{2} = \frac{2}{2} = 1$; onde l'equazione $4km^2 -$

$3pkm - C = 0$, diviene $8m^2 - 6m - 52 = 0$; e ponendo $2m = y$, si ha $y^2 - 3y - 52 = 0$, la qual tiene $y - 4$ per divisore commensurabile; dunque $y = 4$, e perciò $m = 2$; di più l'equazione $n = m^2 - p$, ne dà $n = 4 - 1 = 3$. Avendosi dunque $m = 2$, $n = 3$, $k = 2$,

si avrà $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\sqrt{3}$.

Attualmente si capisce come debbasi procedere per le grandezze più elevate.

Del modo di approssimar le radici delle Equazioni composte,

226. Il metodo che si va ad esporre per approssimare il valor dell'incognita nelle equazioni, suppone che di già si abbia un valore di questa radice, approssimato soltanto fino alla sua parte decima ad un di presso. Veggasi dunque come possa ottenersi questo primo valore. Diasi per esempio l'equazione $x^3 - 5x + 6 = 0$.

In vece di x sostituisconsi in questa equazione più numeri, sì positivi, che negativi, fino a che queste due consecutive sostituzioni porgano due risultati di segni contrarj. Quando sonosi incontrati due numeri di tal fatta, allora si conchiude che il valor di x giace tra essi; in modo che se questi due numeri differiscano per una parte decima, o pur meno; si ha il valore approssimante che si cerca, col prendere o l'uno o l'altro, o uno medio tra essi.

Ma se essi differisean di più di una parte decima, allora si opererà come segue.

Nell' equazione $x^3 - 5x + 6 = 0$ sostituisconsi i numeri 0, 1, 2, 3, 4, ec.; ma subito si osserva che essi offrono tutti dei risultati positivi, e che si andrebbe all' infinito operando similmente. Per cui sostituisconsi i numeri 0, -1, -2, -3, ec., i quali ne danno i seguenti risultati:

<i>Sostituzioni.</i>	<i>Risultati.</i>
0	+ 6
- 1	+ 10
- 2	+ 8
- 3	- 6

Devesi dunque fermare a questi due ultimi, e conchiudere che una delle radici giace tra -2 e -3. Ma come questi numeri differiscono di 1, il quale è maggiore della decima parte di ciascuno, così si prende un medio tra essi, cioè si prende -2,5 metà di -5 lor somma. Sostituisconsi nell' equazione il -2,5 in vece di x ; e si ha per risultato +2,875, cioè una grandezza positiva; dunque si conchiude che la radice giace tra -2,5, e -3.

Si prenda un medio tra -2,5, e -3; cioè -2,7, trascurando ciò che vi è al di là delle decime.

Nell' equazione si sostituisca $-2,7$ in vece di x , e si ha per risultato $-0,183$, cioè una grandezza negativa. Dunque poichè $-2,5$ ha esibito un risultato positivo, ed un altro negativo ne ha dato $-2,7$; perciò il valore di x giace tra $-2,5$ e $-2,7$; or questi due numeri differiscono di $0,2$ ch'è minore della decima parte di ciascun di essi; dunque prendendo un medio tra i medesimi, il valor di x sarà $-2,6$ che differisce dal vero per meno di una decima sua parte.

Essendosi così trovato un numero che differisce da x per meno di una sua decima parte, suppongasi x uguale a tal numero più una novella incognità z ; cioè qui suppongasi $x = -2,6 + z$, e si sostituisca nell' equazione questa grandezza in vece di x ; ma come z tutto al più è una decima di $2,6$; così il suo quadrato sarà tutto al più la centesima del quadrato di $2,6$; il suo cubo tutto al più la millesima del cubo di questo; e così in seguito, per cui in questa sostituzione si trascurano tutte le potenze di z superiori alla prima; e per non far calcoli inutili, nel formare il cubo di $-2,6 + z$, e le altre sue potenze se ve ne sieno, si ammettono i soli due primi termini che si avranno colla regola data (149).

Per sostituir con ordine, scrivansi come vedesi qui appresso:

$$x^3 = (-2,6 + z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z - 5z = -5(-2,6 + z) = -5(-2,6) - 5z + 6 = +6$$

Riunendo il tutto, si avrà per risultato della sostituzione $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z - 5z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, e facendo le indicate operazioni, e le riduzioni, si avrà

$$15,28z + 1,424 = 0; \text{ donde si ha } z = -\frac{1,424}{15,28}, \text{ e ridu-}$$

tendo in decimali, ne vien $x = -0,09$; grandezza in cui la divisione si è spinta sino ad avere una sola cifra significativa. In generale, la divisione deve spingersi ad aver tante cifre significative, compresavi la prima che si trova, quante sono le piazze giacenti tra questa, e la prima cifra del primo valore approssimato di x : qui tra 9, ch'è la prima cifra significativa del quoziente 0,09; e 2, ch'è la prima cifra di 2, 6, primo valore approssimato di x , vi esiste una sola piazza; per cui si è fermato alla prima cifra significativa 9.

Il valor di x , cioè $x = -2,6 + x$, divien dunque $x = -2,6 - 0,09$, cioè $x = -2,69$.

Per avere un tal valore più esattamente, supponesi ora $x = -2,69 + t$;

$$\begin{aligned} \text{Sarà dunque } x^3 &= (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 \cdot t \\ -5x &= -5(-2,69) - 5t \\ +6 &= +6 \end{aligned}$$

E dopo eseguite le riduzioni, si avrà per conseguenza $-0,015109 + 16,7083t = 0$, da cui si ottiene

$$t = \frac{0,015109}{16,7083}, \text{ che riducesi a } t = 0,000904.$$

Dunque $x = -2,69 + t$, diviene $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Se vogliasi passar più oltre, si porrà $x = -2,689096 + u$, e si procederà dell'istesso modo.

Prendasi per secondo esempio l'equazione

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

Ed operando come di sopra, si troverà che il valor di x approssimato per meno di una decima, è 2,3.

Pongasi dunque $x = 2,3 + z$. Sostituendo, e trascurando z^2 , z^3 , ec., si avrà

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,3)^4 + 4(2,3)^3 \cdot z \\ - 4x^3 &= -4(2,3)^3 - 12(2,3)^2 \cdot z \\ - 3x &= -3(2,3) - 3z \\ + 27 &= +27 \end{aligned}$$

Onde fatte tutte le riduzioni, sarà $-0,5839 - 17,812 z = 0$; per cui $z = -\frac{0,5839}{17,812} = -0,03$; e si ferma alle centesime, per la stessa ragione addotta di sopra. Dunque il valor di x è $x = 2,3 - 0,03 = 2,27$.

Per approssimar maggiormente, pongasi $x = 2,27 + t$, e sostituendo, si avrà

$$\begin{aligned} x^4 &= (2,27)^4 + 4(2,27)^3 \cdot t \\ - 4x^3 &= -4(2,27)^3 - 12(2,27)^2 \cdot t \\ - 3x &= -3(2,27) - 3t \\ + 27 &= +27 \end{aligned}$$

Per cui eseguendo tutte le riduzioni, si ha $-0,04595359 - 18,046463t = 0$, e perciò $t = -\frac{0,04595359}{18,046463} = -0,0025$, onde $x = 2,2675$.

Riflessioni sul Metodo precedente.

227. L' esposto metodo, il qual si deve a *Newton*, richiede, come già si è veduto, che trovinsi due numeri che sostituiti nell'equazione, uno per volta, in vece della sua incognita, dien due risultati, uno positivo, negativo l'altro. E si è detto che si avrà sempre una radice della equazione, che sarà compresa tra gli enunciati due numeri; lo che è facile a capirsi. Poichè se il minor valore

di x si rappresenti per a , e per b quello immediatamente maggiore, in modo che $x - a$ ed $x - b$ sien due fattori dell'equazione; è chiaro che $x - a$ divien negativa, se in vece di x si sostituisce un numero positivo minor di a . E se in vece della stessa x si sostituisca un numero positivo maggior di a , ma minor di b , diverrà positiva $x - a$; e 'l prodotto degli altri fattori avrà lo stesso segno che nel primo caso; poichè dunque cambia segno il solo fattore $x - a$, perciò cambierà sicuramente segno il prodotto totale. Si dimostrerà lo stesso, se il minor fattore sia $x + a$, in vece di essere $x - a$, ma però sostituendo dei numeri negativi.

Ma intanto può accadere che non siavi alcun valore reale, sia positivo, sia negativo, il qual sostituito in vece di x , dia due risultati di segno contrario.

Ciò può accadere in tre casi; 1.º quando le radici sono uguali a due a due, a quattro a quattro, ec.

2.º Quando tutte le radici sono immaginarie.

3.º Quando le radici sono parte immaginarie, e parte uguali a due a due.

Per esempio, un'equazione che risulti dalla moltiplicazione di questi quattro fattori $x - a$, $x - a$, $x - b$, $x - b$, cioè l'equazione $(x - a)^2 \times (x - b)^2 = 0$, non cambia mai segno, qualunque valore sostituisca per x , sia positivo, sia negativo. In fatti il quadrato di $x - a$ è sempre positivo, positiva o negativa che fosse $x - a$. E lo stesso è di $x - b$.

In quanto al caso in cui tutte le radici sono immaginarie, è evidente che non siavi alcun numero reale da sostituirsi per x , il qual possa dare due risultati di segno contrario; poichè se ciò accadesse, il valor di x giacerebbe dunque tra questi due numeri reali, per cui esso sarebbe purè reale; lo che è contro la supposizione.

Finalmente il terzo caso segue immediatamente da questi due che si sono esaminati.

Si passi ora a vedere come proceder si debba per aver le radici in questi casi.

Del modo di aver le Radici uguali delle Equazioni.

228. Per aver le radici uguali che posson contenersi in un'equazione, si moltiplichi ciascun termine, per l'esponente della x in esso esistente, ed un tal esponente diminuisca di una unità; si ha così una nuova equazione. Tra questa e l'equazione proposta si cerchi il massimo comun divisore, esso sarà il prodotto dei fattori che si costituiscono dalle radici uguali della proposta, i quali fattori troveransi però elevati ad una potenza di una unità di meno che nella proposta.

Per esempio, l'equazione

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2a^2bx + a^3b^2 &= 0 \\ - 2bx^3 + 4abx^2 - 2a^2bx & \\ + b^2x^2 & \end{aligned}$$

è il prodotto di $(x - a)^2$ per $(x - b)^2$.

Se si moltiplichino ciascun termine di essa per l'esponente della x , un tal esponente diminuisca di una unità, e riflettasi che l'esponente della x nell'ultimo termine è zero, si avrà

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x - 2a^2b &= 0; \\ - 6bx^2 + 8abx - 2ab^2 & \\ + 2b^2x & \end{aligned}$$

equazione, il cui massimo comun divisore colla proposta è $x^2 - ax + ab$, che è il prodotto di $(x - a)(x - b)$,
 $- bx$

e nel quale ravvisansi gli stessi fattori esistenti in

$(x - a)^m \times (x - b)^n$, elevati però ad una potenza di una unità di meno. Ecco la dimostrazione di questa regola.

Si è osservato (149) che

$$(x + b)^m = x^m + m \cdot x^{m-1} b + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot x^{m-2} b^2 + \\ m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot x^{m-3} b^3 + \text{ec.}$$

Ora ciascun termine del secondo membro di questa equazione, si moltiplichi per l'esponente della x , e lo stesso esponente si diminuisca di una unità, si avrà la seguente grandezza

$$mx^{m-1} + m \cdot (m-1) x^{m-2} b + m \cdot \frac{m-1}{2} (m-2) \cdot \\ x^{m-3} b^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} (m-3) \cdot x^{m-4} b^3 + \text{ec.}$$

La quale è la stessa di

$$m [x^{m-1} + (m-1) x^{m-2} b + (m-1) \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \\ x^{m-3} b^2 + (m-1) \cdot \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} x^{m-4} b^3 + \text{ec.}]$$

cioè (149), essa è precisamente $m (x + b)^{m-1}$.

Da ciò conchiudesi dunque, che quando si moltiplica ciascun termine della potenza m del binomio $x + b$, per l'esponente della x del termine stesso, questo prodotto è precisamente la potenza prossimamente inferiore dello stesso binomio, moltiplicata per l'esponente della potenza attuale. Dunque la regola è dimostrata pel caso in cui tutte le radici sono uguali.

Abbiasi ora $(x + b)^m \times (x + d)^n$, sviluppandosi dell'istesso modo $(x + b)^m$ ed $(x + d)^n$, e moltiplicando i

due risultati tra loro; se si moltiplichino poi ciascun termine per l'esponente di x , col calcolo si troverà pure che il risultato è $m(x+b)^{m-1} \times (x+d)^n + n(x+b)^m \times (x+d)^{n-1}$, di cui il massimo comun divisore con $(x+b)^m \times (x+d)^n$ è $(x+b)^{m-1} \times (x+d)^{n-1}$, e così in seguito, qualunque sia il numero dei fattori $x+b$, $x+d$, cc.

*Del modo di aver le Radici immaginarie
delle Equazioni.*

229. Benchè diverse forme possano avere le radici immaginarie delle equazioni, in corrispondenza dei gradi di queste, pur nondimeno posson tutte ridursi alla seguente forma, $x = a + b\sqrt{-1}$, in cui a e b sien grandezze reali, positive o negative. La dimostrazione di questa verità menerebbe troppo a lungo, ma intanto essa si potrà riscontrare nelle *Memorie dell'Accademia di Berlino per l'anno 1746*, in dove il Sig.^r Dalember Autore della medesima fa vedere, che mentre un dei valori di x può esser rappresentato da $a + b\sqrt{-1}$, deve esservene anche un altro espresso da $a - b\sqrt{-1}$; donde segue 1.^o, che le sole equazioni di grado pari possano aver tutte le radici immaginarie.

2.^o Che un'equazione di cui tutte le radici sieno immaginarie, si può scomporre in fattori del secondo grado di questa forma $(x - a - b\sqrt{-1}) \times (x - a + b\sqrt{-1})$, cioè in fattori reali del secondo grado; poichè facendo la moltiplicazione, si ha $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, grandezza in cui non più vi esistono immaginari.

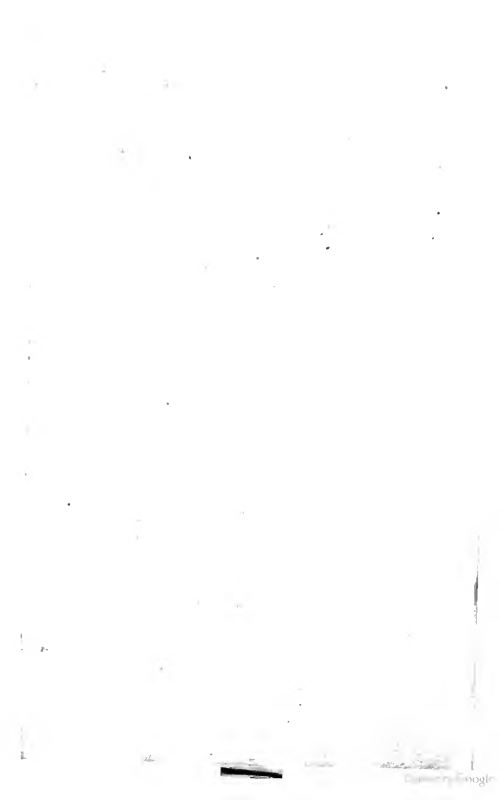
Dunque quando un' equazione ha immaginarie tutte le sue radici, se si cerca di scomporla in fattori del secoudo grado, come $x^2 + gx + h$ [lo che si farà del modo indicato (223)], l' equazione in h avrà sicuramente delle radici reali; onde queste potransi aver sempre, almeno per approssimazione. Per cui di qualunque equazione possonsi sempre aver le radici, sien reali, sieno immaginarie, almeno per approssimazione.

FINE DELLA PRIMA SEZIONE.



585973

564

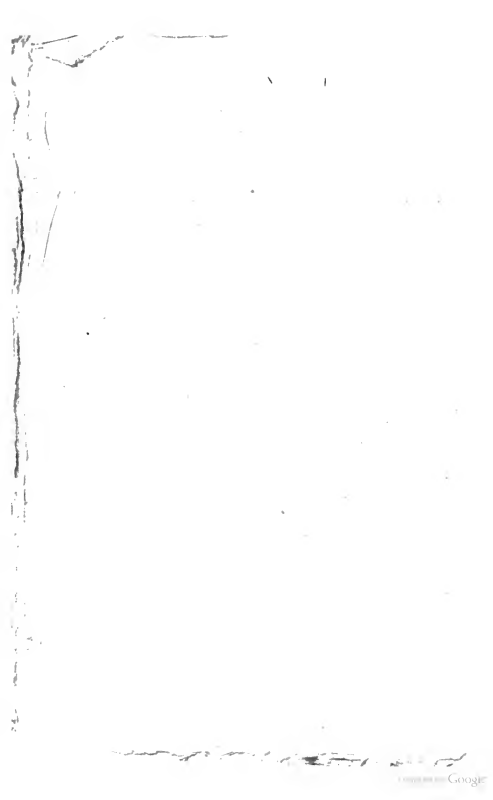


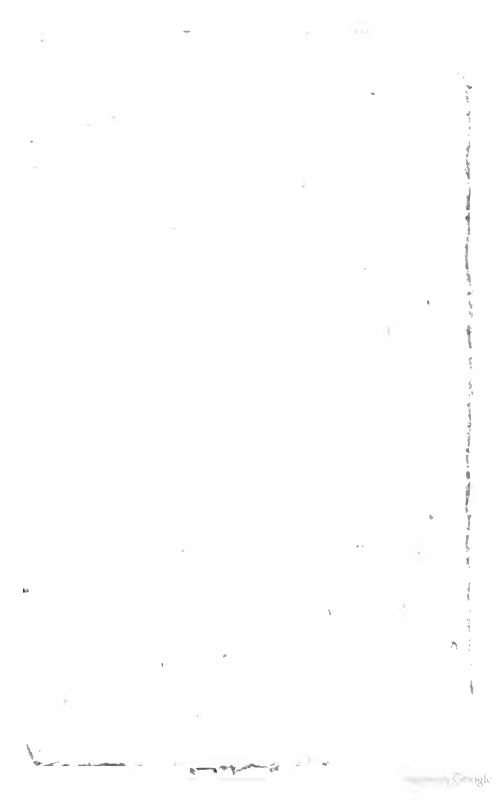
ERRORI.

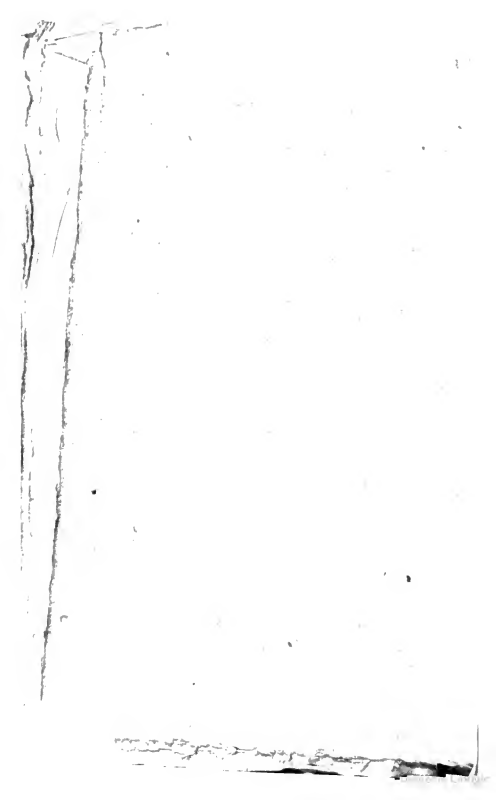
Pag.	Ver.
VIII	
11	4 moltiplicarsi
13	16 monimie
15	25 prodoto -
22	6 $a^2 + 2ab + b^2$
22	18 $a + 3ab + b^2$
51	1 allora il termine
71	19 i lor valori s
71	20 $= \frac{9}{11}$
72	21 primo
76	19 la
211	20 <i>secondo</i>

CORREZIONI.

XVII	
moltiplicarsi	
monomie	
prodotto	
$a^2 + 2ab + b^2$	
$a^2 + 3ab + b^2$	
allora il membro	
i lor valori si	
$= 57 \frac{9}{11}$	
primo	
al	
<i>prime</i>	







Trattoria d'Arte

NIOLA

Via G. F. adino, 1.

Digitized by Google

